Louis COUTURAT

L'Algèbre de la Logique

DEUXIÈME ÉDITION

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
ALBERT BLANCHARD
9, Rue de Médicis — 75006 PARIS
1980

LOUIS COUTURAT

L'Algèbre de la Logique

DEUXIÈME ÉDITION.

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
ALBERT BLANCHARD
9, Rue de Médicis — 75006 PARIS
1980

A LA MÊME LIBRAIRIE

De l'infini mathématique, 1 vol. in-8 (Paris, Alcan, 1896).

Les principes des Mathématiques, 1 vol. in-8, *sous presse* (Paris, Alcan).

L'ALGÈBRE DE LA LOGIQUE.

1. Introduction. — L'Algèbre de la Logique a été fondée par GEORGE BOOLE (1815-1864), développée et perfectionnée par ERNST SCHRÖDER (1841-1902). Les lois fondamentales de ce calcul ont été inventées pour exprimer les principes du raisonnement, les « lois de la pensée » ; mais on peut considérer ce calcul au point de vue purement formel, qui est celui des Mathématiques, comme une Algèbre reposant sur certains principes arbitrairement posés. C'est une question philosophique de savoir si, et dans quelle mesure, ce calcul répond aux opérations réelles de l'esprit, et est propre à traduire ou même à remplacer le raisonnement ; nous n'avons pas à la traiter ici. La valeur formelle de ce calcul et son intérêt pour le mathématicien sont absolument indépendants de l'interprétation qu'on en donne et de l'application qu'on peut en faire aux problèmes logiques. En un mot, nous l'exposerons, non en tant que Logique, mais en tant qu'Algèbre.

2. Les deux interprétations du calcul logique. — Il se présente même une circonstance particulièrement intéressante : l'Algèbre en question est susceptible, en Logique même, de deux interprétations distinctes, dont le parallélisme est presque parfait, suivant que les lettres représentent des concepts ou des propositions. Sans doute, on peut, avec Boole et Schröder, ramener ces deux interprétations à une seule, en considérant les concepts, d'une part, et les propositions, d'autre part, comme correspondant à des *ensembles* ou *classes* : un concept détermine l'ensemble des objets auxquels il s'applique (et qu'on nomme en Logique son *ex-*

tension); une proposition détermine l'ensemble des cas ou des instants du temps où elle est vraie (et qu'on peut, par analogie, appeler aussi son extension); et alors le calcul des concepts et celui des propositions se réduisent à un seul, le calcul des classes, ou encore, comme disait Leibniz, la théorie du tout et de la partie, du contenant et du contenu. Mais, en fait, le calcul des concepts et celui des propositions présentent, comme on le verra, certaines divergences qui empêchent de les identifier complètement, au point de vue formel, et par suite de les ramener au seul « calcul des classes ». Cela fait donc, en réalité, trois calculs différents, ou, dans la partie qui leur est commune, trois interprétations diverses d'un même calcul. Quoi qu'il en soit, le lecteur ne devra pas oublier que la valeur logique et l'enchaînement déductif des formules ne dépendent nullement des interprétations qu'on en donne, et, pour lui rendre plus facile cette abstraction nécessaire, nous aurons soin de faire précéder toutes les phrases interprétatives des signes « I. C. » (*interprétation conceptuelle*) et « I. P. » (*interprétation propositionnelle*). Ces interprétations ne serviront qu'à rendre les formules intelligibles, à leur donner la clarté et l'évidence intuitives, mais nullement à les justifier; et l'on pourrait les supprimer sans nuire à la rigueur logique du système.

Pour ne préjuger aucune interprétation, nous dirons que les lettres représentent des *termes*; ces termes pourront être, suivant les cas, des concepts ou des propositions. Nous emploierons donc le mot *terme* uniquement au sens logique. Pour désigner les « termes » d'une somme, nous emploierons le mot *sommande*, pour ne pas confondre le sens logique et le sens mathématique de ce mot. Un terme pourra donc être aussi bien un facteur qu'un sommande.

3. Relation d'inclusion. — L'Algèbre de la Logique, comme toute théorie déductive, peut être établie sur divers systèmes de principes [1]; nous choisirons celui de ces sys-

[1] Voir HUNTINGTON, *Sets of independent postulates for the Algebra of Logic*, ap. *Transactions of the American mathematical Society*, t. V, 1904, p. 288-309.

tèmes qui se rapproche le plus de l'exposé de Schröder et de l'interprétation logique habituelle.

La relation fondamentale de ce calcul est la relation binaire (à 2 termes) qu'on appelle *inclusion* (pour les classes), *subsomption* (pour les concepts) ou *implication* (pour les propositions). Nous adopterons le premier nom, comme étant neutre entre les deux interprétations logiques; et nous représenterons cette relation par le signe $<$, parce qu'elle a des propriétés formelles analogues à celles de la relation mathématique $<$ (*plus petit que*) ou plus exactement $\leqq$, notamment celle de n'être pas symétrique. En raison de cette analogie, Schröder représentait cette relation par le signe $\mathrel{=\!\!\!<}$, que nous n'adopterons pas, parce qu'il est complexe, tandis que la relation d'inclusion est simple.

Dans le système de principes que nous adoptons, cette relation est prise pour notion première, et est par conséquent *indéfinissable*. Les explications qui vont suivre n'ont pas pour but de la définir, mais seulement d'en indiquer le sens dans chacune des deux interprétations.

I. C. : La relation $a < b$, où a et b désignent des concepts, signifie que le concept a est subsumé sous le concept b, c'est-à-dire est une espèce par rapport au genre b. Au point de vue de l'extension, elle signifie que la classe des a est contenue dans celle des b ou en fait partie ; ou, plus brièvement, que « tout a est b ». Au point de vue de la compréhension, elle signifie que le concept b est contenu dans le concept a ou en fait partie, que, par suite, le caractère a implique ou entraîne le caractère b. Exemple : « tout homme est mortel » ; « homme implique mortel » ; « qui dit homme dit mortel » ; ou simplement : « homme, donc mortel ».

I. P. : La relation $a < b$, où a et b désignent des propositions, signifie que la proposition a implique ou entraîne la proposition b, ce qu'on exprime souvent par ce jugement hypothétique : « Si a est vrai, b est vrai » ; ou par : « a implique b » ; ou plus simplement par : « a, donc b ». On voit que dans les deux interprétations la relation $<$ peut se traduire approximativement par *donc*.

Remarque. — Quelle que soit l'interprétation des termes a et b, une relation telle que « $a < b$ » est une proposition.

Par conséquent, lorsqu'une relation $<$ a pour membres deux relations semblables (ou même une seule), elle ne peut recevoir que l'interprétation propositionnelle, c'est-à-dire elle ne peut signifier qu'une implication.

On appelle proposition *primaire* toute relation dont les membres sont des termes simples (des lettres); proposition *secondaire* toute relation dont les membres sont des propositions primaires; et ainsi de suite.

On voit par là, dès maintenant, que l'interprétation propositionnelle est plus homogène que l'autre, puisque seule elle permet de donner le même sens à la copule $<$ dans les propositions primaires et secondaires.

4. Définition de l'égalité. — Il y a une seconde copule qu'on peut définir au moyen de la première : c'est la copule $=$ (*égale*). Par définition, on aura

$$a = b,$$

toutes les fois qu'on aura *à la fois :*

$$a < b, \qquad b < a,$$

et alors seulement; en d'autres termes, la relation unique « $a = b$ » équivaut aux deux relations simultanées « $a < b$ », « $b < a$ ».

Le sens de la copule $=$ est déterminé dans les deux interprétations par sa définition formelle :

I. C. : $a = b$ signifie que « tout a est b et tout b est a » ; autrement dit, que les classes a et b coïncident, sont identiques [1].

I. P. : $a = b$ signifie que a implique b et b implique a ; autrement dit, que les propositions a et b sont équivalentes, c'est-à-dire vraies ou fausses à la fois [2].

[1] Cela ne veut pas dire que les concepts a et b aient le même sens. Exemples : « triangle » et « trilatère », « triangle équiangle » et « triangle équilatéral ».

[2] Cela ne veut pas dire qu'elles aient le même sens. Exemple : « le triangle ABC a deux côtés égaux », et « le triangle ABC a deux angles égaux ».

Remarque. — La relation d'égalité est symétrique, en vertu même de sa définition : $a = b$ équivaut à $b = a$. Mais la relation d'inclusion n'est pas symétrique : $a < b$ n'équivaut pas à $b < a$ ni ne l'implique. On pourrait convenir de considérer l'écriture $a > b$ comme équivalente à $b < a$; mais nous préférons, pour plus de clarté, conserver toujours le même sens à la copule $<$. Seulement nous pourrons traduire verbalement une même inclusion « $a < b$ » tantôt par « a est contenu dans b », tantôt par « b contient a ».

Pour ne préjuger aucune interprétation, nous appellerons le premier membre de cette relation l'*antécédent*, et le second le *conséquent*.

I. C. : L'antécédent est le *sujet*, et le conséquent est le *prédicat* d'une proposition universelle affirmative.

I. P. : L'antécédent est la *prémisse*, ou la *cause*, et le conséquent est la *conséquence*. Quand une implication se traduit par un jugement *hypothétique* (ou *conditionnel*), l'antécédent s'appelle l'*hypothèse* (ou la *condition*), et le conséquent la *thèse*.

Quand nous aurons à démontrer une égalité, nous la décomposerons le plus souvent en deux inclusions inverses que nous démontrerons séparément. On effectue aussi quelquefois cette décomposition quand l'égalité est une donnée (une *prémisse*).

Quand les deux membres de l'égalité sont des propositions, elle se décompose en deux implications ; si l'une d'elles est un *théorème*, l'autre en est la *réciproque*. Ainsi, toutes les fois qu'un théorème a sa réciproque vraie, il donne lieu à une égalité. Un théorème simple donne lieu à une implication, dont l'antécédent est l'*hypothèse*, et le conséquent la *thèse* du théorème.

On dit souvent que l'hypothèse est la *condition suffisante* de la thèse, et la thèse la *condition nécessaire* de l'hypothèse : en effet, il suffit que l'hypothèse soit vraie pour que la thèse le soit ; tandis qu'il faut que la thèse soit vraie pour que l'hypothèse le soit. Quand un théorème a sa réciproque vraie, on dit que son hypothèse est la condition nécessaire et suffisante de sa thèse : cela veut dire qu'elle en est à la fois la cause et la conséquence.

5. Principe d'identité. — Le premier principe ou axiome de l'Algèbre de la Logique est le *principe d'identité*, qui se formule ainsi

(I) $$a < a,$$

quel que soit le terme a.

I. C. : « Tout a est a », c'est-à-dire une classe quelconque est contenue dans elle-même.

I. P. : « a implique a », c'est-à-dire une proposition quelconque s'implique elle-même.

Telle est la formule primitive du principe d'identité ; on peut en déduire, au moyen de la définition de l'égalité, une autre formule qu'on prend souvent, à tort, pour l'expression de ce principe :

$$a = a.$$

quel que soit a. En effet, de ce qu'on a

$$a < a, \quad a < a,$$

il résulte immédiatement qu'on a

$$a = a.$$

I. C. : La classe a est identique à elle-même.

I. P. : La proposition a est équivalente à elle-même.

6. Principe du syllogisme. — Un second principe de l'Algèbre de la Logique est le *principe du syllogisme*, qui se formule comme suit :

(II) $$(a < b)(b < c) < (a < c).$$

I. C. : « Si tout a est b, et si tout b est c, tout a est c. » C'est le principe du *syllogisme catégorique*.

I. P. : « Si a implique b, et si b implique c, a implique c. » C'est le principe du *syllogisme hypothétique*.

On voit que, dans cette formule, la copule principale a toujours le sens de l'implication, parce que c'est une proposition secondaire.

En vertu de la définition de l'égalité, le principe du syllo-

gisme a pour conséquences les formules suivantes ([1]) :

$$(a < b)(b = c) < (a < c),$$
$$(a = b)(b < c) < (a < c),$$
$$(a = b)(b = c) < (a = c).$$

La conclusion n'est une égalité que lorsque les deux prémisses sont des égalités.

Les formules précédentes peuvent se généraliser comme suit :

$$(a < b)(b < c)(c < d) < (a < d),$$
$$(a = b)(b = c)(c = d) < (a = d).$$

Ce sont là les deux principales formules du *sorite;* on peut imaginer beaucoup d'autres combinaisons. Mais on n'a, pour conclusion, une égalité que si toutes les prémisses sont des égalités. Cette remarque a une grande portée pratique. Dans une suite de déductions, il faut bien faire attention si le passage d'une proposition à l'autre a lieu en vertu d'une équivalence ou seulement d'une implication. Il n'y a équivalence entre les deux propositions extrêmes que si toutes les déductions intermédiaires sont des équivalences ; dans le cas contraire, n'y eût-il qu'une seule implication dans la chaîne, la relation des deux propositions extrêmes est seulement l'implication.

7. Multiplication et addition. — L'Algèbre de la Logique comporte trois opérations, qui sont : la *multiplication* et l'*addition* logiques et la *négation*. Les deux premières sont des opérations binaires, c'est-à-dire des combinaisons de *deux* termes ayant pour résultat un troisième terme (différent ou non de chacun d'eux). L'existence du *produit* et de la *somme* logiques de deux termes doit nécessairement faire l'objet d'un double postulat, car il ne suffit pas de définir une entité quelconque pour qu'elle existe. Voici comment on peut formuler ces deux postulats :

III. Étant donnés deux termes quelconques a et b, il existe

([1]) Rigoureusement, ces formules supposent les lois de la multiplication, qui seront établies plus loin ; mais il convenait de les citer dès maintenant pour les rapprocher du principe du syllogisme, dont elles dérivent.

un terme p tel qu'on a

$$p < a, \quad p < b,$$

et que, pour tout terme x, tel qu'on ait

$$x < a, \quad x < b,$$

on a aussi

$$x < p.$$

IV. Étant donnés deux termes quelconques a et b, il existe un terme s tel qu'on a

$$a < s, \quad b < s,$$

et que, pour tout terme x, tel qu'on ait

$$a < x, \quad b < x,$$

on a aussi

$$s < x.$$

On démontre aisément que les termes p et s déterminés par les conditions énoncées sont uniques, et l'on peut alors définir *le* produit ab et *la* somme $a + b$ comme étant respectivement le terme p et le terme s.

I. C. : 1° Le produit de deux classes est une classe qui est contenue dans chacune d'elles, et qui contient toute (autre) classe contenue dans chacune d'elles;

2° La somme de deux classes a et b est une classe s qui contient chacune d'elles, et qui est contenue dans toute (autre) classe qui contient chacune d'elles.

On peut dire, en prenant les mots *plus petit que*, *plus grand que* dans un sens métaphorique que suggère l'analogie de la relation $<$ avec la relation mathématique d'inégalité : Le produit de deux classes est la plus grande des classes contenues dans toutes deux; la somme de deux classes est la plus petite des classes qui les contiennent toutes deux [1]. Par

[1] En vertu d'une autre analogie, M. Dedekind désigne la somme et le produit logiques par les mêmes signes que le plus petit commun multiple et le plus grand commun diviseur, à savoir par $\mathfrak{M}(a, b)$ et $\mathfrak{G}(a, b)$ (*Was sind und was sollen die Zahlen*, n°s 8 et 77, 1887); et M. Georg Cantor les désignait primitivement par ces mêmes noms (*Mathematische Annalen*, t. XVII, 1880).

conséquent, le produit de deux classes est leur partie commune (l'ensemble de leurs éléments communs), et la somme de deux classes est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à l'une au moins d'entre elles.

I. P. : 1° Le produit de deux propositions est une proposition qui implique chacune d'elles, et qui est impliqué par toute proposition qui les implique toutes deux;

2° La somme de deux propositions est une proposition qui est impliquée par chacune d'elles, et qui implique toute proposition impliquée par toutes deux.

On peut donc dire que le produit de deux propositions est leur plus faible cause commune, et que leur somme est leur plus forte conséquence commune, en entendant le fort et le faible en ce sens que toute proposition qui en implique une autre est plus forte que celle-ci, et que celle-ci est plus faible que celle-là. On s'aperçoit aisément que le produit de deux propositions consiste dans leur *affirmation simultanée :* « a et b sont vraies », ou simplement « a et b »; et que leur somme consiste dans leur *affirmation alternative :* « a ou b est vraie », ou simplement « a ou b ».

Remarque. — L'addition logique ainsi définie n'est pas disjonctive, c'est-à-dire elle ne suppose pas que les deux sommandes n'ont aucun élément commun.

8. Principes de simplification et de composition. — Des deux définitions précédentes, ou plutôt des postulats qui les précèdent et les justifient, résultent immédiatement les formules suivantes :

(1) $$ab < a, \quad ab < b,$$

(2) $$a < a + b, \quad b < a + b,$$

(3) $$(x < a)(x < b) < (x < ab),$$

(4) $$(a < x)(b < x) < (a + b < x).$$

Les formules (1) et (2) portent le nom de *principe de simplification ;* elles permettent, en effet, de *simplifier* les prémisses d'un raisonnement, en en déduisant des propositions plus faibles : soit en déduisant d'un produit un de ses facteurs, soit en déduisant d'une proposition une somme (alternative) dont elle est un sommande.

Les formules (3) et (4) s'appellent *principe de composition*, parce qu'elles permettent de réunir (de *composer*) deux inclusions de même antécédent ou de même conséquent. Dans le premier cas, on fait le *produit* des conséquents ; dans le second, on fait la *somme* des antécédents.

Les formules du principe de composition peuvent se transformer en égalités, au moyen du principe du syllogisme et du principe de simplification. En effet, on a

1° (Syll.) $(x < ab)(ab < a) < (x < a)$,
(Syll.) $(x < ab)(ab < b) < (x < b)$,

donc

(Comp.) $(x < ab) < (x < a)(x < b)$,
2° (Syll.) $(a < a + b)(a + b < x) < (a < x)$,
(Syll.) $(b < a + b)(a + b < x) < (b < x)$,

donc

(Comp.) $(a + b < x) < (a < x)(b < x)$.

Si l'on rapproche ces nouvelles formules des précédentes qui en sont les inverses, on pourra écrire

$$(x < ab) = (x < a)(x < b),$$
$$(a + b < x) = (a < x)(b < x).$$

Ainsi, dire que x est contenu dans ab, équivaut à dire qu'il est contenu à la fois dans a et dans b ; et dire que x contient $a + b$, équivaut à dire qu'il contient à la fois a et b.

9. Lois de tautologie et d'absorption. — Les définitions de la somme et du produit logiques n'impliquant aucun ordre entre les termes sommés ou multipliés, l'addition et la multiplication logiques jouissent évidemment des propriétés commutative et associative qu'expriment les formules

$ab = ba,$	$a + b = b + a,$
$(ab)c = a(bc),$	$(a + b) + c = a + (b + c).$

Elles jouissent, en outre, d'une propriété spéciale, qu'ex-

prime *la loi de tautologie*

$$a = aa, \quad | \quad a = a + a.$$

Démonstration :

1° (Simpl.) $aa < a,$
(Comp.) $(a < a)(a < a) = (a < aa),$

d'où, en vertu de la définition de l'égalité,

$$(aa < a)(a < aa) = (a = aa).$$

De même :

2° (Simpl.) $a < a + a,$
(Comp.) $(a < a)(a < a) = (a + a < a),$

d'où

$$(a < a + a)(a + a < a) = (a = a + a).$$

De cette loi il résulte qu'une somme ou un produit d'un nombre quelconque de termes égaux (identiques) est égal à un seul. Il n'y a donc, dans l'Algèbre de la Logique, ni multiples, ni puissances, ce qui est une simplification énorme par rapport à l'Algèbre numérique.

L'addition et la multiplication logiques possèdent enfin une propriété remarquable qui sert aussi à simplifier notablement les calculs, et qu'exprime la *loi d'absorption*

$$a + ab = a, \quad | \quad a(a + b) = a.$$

Démonstration :

1° (Comp.) $(a < a)(ab < a) < (a + ab < a),$
(Simpl.) $a < a + ab,$

d'où, par définition de l'égalité,

$$(a + ab < a)(a < a + ab) = (a + ab = a).$$

De même.

2° (Comp.) $(a < a)(a < a + b) < [a < a(a + b)],$
(Simpl.) $a(a + b) < a,$

d'où

$$[a < a(a+b)][a(a+b) < a] = [a(a+b) = a].$$

Ainsi, un terme (a) *absorbe* un sommande (ab) dont il est facteur, ou un facteur $(a+b)$ dont il est sommande.

10. Théorèmes de multiplication et d'addition. — Nous pouvons à présent établir deux théorèmes relatifs à la combinaison des inclusions et des égalités par addition et par multiplication :

(Th. I) $(a < b) < (ac < bc)$, | $(a < b) < (a + c < b + c)$.

Démonstration :

1° (Simpl.) $ac < c$,
(Syll.) $(ac < a)\ (a < b) < (ac < b)$,
(Comp.) $(ac < b)(ac < c) < (ac < bc)$.

2° (Simpl.) $c < b + c$,
(Syll.) $(a < b)(b < b + c) < (a < b + c)$.
(Comp.) $(a < b + c)(c < b + c) < (a + c < b + c)$.

Ce théorème s'étend aisément au cas de l'égalité :

$$(a = b) < (ac = bc), \quad | \quad (a = b) < (a + c = b + c).$$

(Th. II) $(a < b)(c < d) < (ac < bd)$,
| $(a < b)(c < d) < (a + c < b + d)$.

Démonstration :

1° (Syll.) $(ac < a)\ (a < b) < (ac < b)$,
(Syll.) $(ac < c)\ (c < d) < (ac < d)$,
(Comp.) $(ac < b)(ac < d) < (ac < bd)$.

2° (Syll.) $(a < b)(b < b + d) < (a < b + d)$,
(Syll.) $(c < d)(d < b + d) < (c < b + d)$,
(Comp.) $(a < b + d)(c < b + d) < (a + c < b + d)$.

Ce théorème s'étend aisément au cas où l'une des deux

inclusions est remplacée par une égalité

$$(a = b)(c < d) < (ac < bd),$$
$$(a = b)(c < d) < (a + c < b + d).$$

Dans le cas où toutes les deux sont remplacées par des égalités, le résultat est une égalité

$$(a = b)(c = d) < (ac = bd),$$
$$(a = b)(c = d) < (a + c = b + d).$$

En résumé, on peut additionner ou multiplier membre à membre deux (ou plusieurs) inclusions ou égalités; le résultat n'est une égalité que si toutes les propositions combinées sont des égalités.

11. Première formule de transformation des inclusions en égalités. — On peut maintenant démontrer une formule importante, qui permet de transformer une inclusion en une égalité ou inversement :

$$(a < b) = (a = ab), \qquad (a < b) = (a + b = b).$$

Démonstration :

1° $(a < b) < (a = ab), \qquad (a < b) < (a + b = b).$

En effet,

(Comp.) $(a < a)(a < b) < (a < ab),$
$(a < b)(b < b) < (a + b < b).$

D'autre part, on a

(Simpl.) $ab < a, \qquad b < a + b,$
(Df =) $(a < ab)(ab < a) = (a = ab),$
$(a + b < b)(b < a + b) = (a + b = b);$

2° $(a = ab) < (a < b), \qquad (a + b = b) < (a < b).$

En effet,

$$(a = ab)(ab < b) < (a < b),$$
$$(a < a + b)(a + b = b) < (a < b).$$

Remarque. — Si l'on prenait pour notion première (non

définie) la relation d'égalité, on pourrait définir la relation d'inclusion au moyen d'une des deux formules précédentes (1). On pourrait alors démontrer le principe du syllogisme (2).

Les formules précédentes ont une conséquence intéressante

$$(a = b) = (ab = a + b).$$

En effet:

1° $$(a = b) = (a < b)(b < a),$$

$$(a < b) = (a = ab), \quad (b < a) = (a + b = a),$$

(Syll.) $$(a = ab)(a + b = a) < (ab = a + b);$$

2° $$(ab = a + b) < (a + b < ab),$$

(Comp.) $$(a + b < ab) = (a < ab)(b < ab),$$

$$(a < ab)(ab < a) = (a = ab) = (a < b),$$

$$(b < ab)(ab < b) = (b = ab) = (b < a).$$

Donc

$$(ab = a + b) < (a < b)(b < a) = (a = b).$$

12. Loi distributive. — Les principes antérieurement posés permettent de démontrer la *loi distributive inverse*, tant de la multiplication par rapport à l'addition, que de

(1) Voir HUNTINGTON, *op. cit.*, § 1.

(2) Voici cette démonstration. Par définition, on aurait

$$(a < b) = (a = ab),$$
$$(b < c) = (b = bc).$$

Substituons à b, dans la première égalité, sa valeur tirée de la seconde

$$a = abc.$$

Substituons à a son égal ab

$$ab = abc.$$

Cette égalité équivaut à l'inclusion

$$ab < c.$$

Substituons inversement a à ab; il vient

$$a < c. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

l'addition par rapport à la multiplication

$$ac + bc < (a + b)c, \qquad ab + c < (a + c)(b + c).$$

Démonstration :

1°
$$(a < a + b) < [ac < (a + b)c],$$
$$(b < a + b) < [bc < (a + b)c];$$

d'où, par composition,

$$[ac < (a + b)c][bc < (a + b)c] < [ac + bc < (a + b)c].$$

2°
$$(ab < a) < (ab + c < a + c),$$
$$(ab < b) < (ab + c < b + c);$$

d'où, par composition,

$$(ab + c < a + c)(ab + c < b + c) < [ab + c < (a + c)(b + c)].$$

Mais les mêmes principes ne permettent pas de démontrer la *loi distributive directe*

$$(a + b)c < ac + bc, \qquad (a + c)(b + c) < ab + c,$$

et l'on est obligé de postuler l'une de ces formules, ou quelque formule plus simple d'où l'on puisse les déduire. Pour plus de commodité, nous postulerons la formule

(V) $$(a + b)c < ac + bc.$$

Celle-ci, jointe à la formule inverse, engendre l'égalité

$$(a + b)c = ac + bc,$$

que nous appellerons la *loi distributive* tout court.

De celle-ci on déduit immédiatement la formule suivante :

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd,$$

et, par suite, la seconde formule de la loi distributive

$$(a + c)(b + c) = ab + c,$$

car

$$(a + c)(b + c) = ab + ac + bc + c;$$

or, en vertu de la loi d'absorption,

$$ac + bc + c = c.$$

Cette seconde formule implique l'inclusion citée plus haut

$$(a+c)(b+c) < ab+c,$$

laquelle se trouve ainsi démontrée.

Corollaire. — On a l'égalité

$$ab+ac+bc=(a+b)(a+c)(b+c).$$

En effet,

$$(a+b)(a+c)(b+c)=(a+bc)(b+c)=ab+ac+bc.$$

On remarquera que les deux membres de cette égalité ne diffèrent que par la permutation des signes de multiplication et l'addition (cf. n° 14).

13. Définition de o et de 1. — Nous allons maintenant définir et introduire dans le calcul logique deux termes particuliers que nous désignerons par 0 et 1, en raison des analogies formelles qu'ils présentent avec le zéro et l'unité arithmétiques. Ces deux termes sont définis formellement par les deux principes suivants, qui en affirment ou postulent l'existence :

VI. Il existe un terme 0 tel que, quel que soit le terme x, on ait

$$0 < x.$$

VII. Il existe un terme 1 tel que, quel que soit le terme x, on ait

$$x < 1.$$

On peut démontrer que chacun des termes ainsi définis est unique, c'est-à-dire que si un second terme jouit de la même propriété, il est égal (identique) au premier.

Les deux interprétations de ces termes donnent lieu à des paradoxes que nous n'éluciderons pas ici, et que la suite de la théorie justifiera.

I. C. : 0 désigne la classe contenue dans toute classe; c'est

donc la classe *nulle* ou *vide*, qui ne contient aucun élément (le *Rien* ou le *Néant*). 1 désigne la classe qui contient toutes les classes; c'est donc la totalité des éléments qui sont contenus dans celles-ci. C'est ce qu'on appelle (d'après Boole) l'*univers du discours*, ou simplement le *Tout*.

I. P. : 0 désigne la proposition qui implique toute proposition : c'est le *faux* ou l'*absurde* (car elle implique notamment tous les couples de propositions contradictoires). 1 désigne la proposition qui est impliquée dans toute proposition : c'est le *vrai* (car le faux peut impliquer le vrai, tandis que le vrai n'implique que le vrai).

Par définition, on a les inclusions suivantes

$$0 < 0, \quad 0 < 1, \quad 1 < 1,$$

dont la première et la dernière résultent d'ailleurs du principe d'identité. La seconde est importante à retenir :

I. C. : La classe nulle est contenue dans le *tout* [1];

I. P. : Le faux implique le vrai.

En conséquence de la définition de 0 et de 1, on a les équivalences

$$(a < 0) = (a = 0), \quad (1 < a) = (a = 1),$$

puisqu'on a d'autre part, quel que soit le terme a,

$$0 < a, \quad a < 1.$$

Par suite, le principe de composition donne lieu aux deux corollaires suivants :

$$(a = 0)(b = 0) = (a + b = 0),$$
$$(a = 1)(b = 1) = (ab = 1).$$

Ainsi on peut composer deux égalités à second membre 0 en *additionnant* leurs premiers membres, et deux égalités à second membre 1 en *multipliant* leurs premiers membres.

Inversement, dire qu'une somme est nulle, c'est dire que chacun des sommandes est nul; dire qu'un produit est égal à 1, c'est dire que chacun des facteurs est égal à 1.

[1] Il faut éviter de traduire : « Rien est Tout ».

On a aussi

$$(a + b = 0) < (a = 0),$$
$$(ab = 1) < (a = 1),$$

et plus généralement (en vertu du principe du syllogisme)

$$(a < b)(b = 0) < (a = 0),$$
$$(a < b)(a = 1) < (b = 1).$$

On remarquera qu'on ne peut rien conclure jusqu'ici des égalités $ab = 0$ et $a + b = 1$. Et, en effet, dans l'I. C., la première signifie que la partie commune aux classes a et b est nulle; il ne s'ensuit nullement que l'une ou l'autre de ces classes soit nulle; et la seconde signifie que ces deux classes, réunies, forment le Tout; il ne s'ensuit nullement que l'une ou l'autre soit égale au Tout.

On peut démontrer les formules suivantes, qui constituent les règles du calcul de 0 et de 1 :

$$a \times 0 = 0, \quad a + 1 = 1,$$
$$a + 0 = a, \quad a \times 1 = a.$$

En effet,

$$(0 < a) = (0 = 0 \times a) = (a + 0 = a),$$
$$(a < 1) = (a = a \times 1) = (a + 1 = 1).$$

Ainsi ajouter 0 à un terme ou le multiplier par 1, ce n'est pas le changer; c'est ce qu'on exprime en disant que 0 est le *module* de l'addition, et 1 le *module* de la multiplication. Au contraire, le produit d'un terme quelconque par 0 est 0, et la somme d'un terme quelconque et de 1 est 1.

Ces formules justifient l'interprétation donnée de ces deux termes :

I. C. : La partie commune à une classe quelconque et à la classe nulle est la classe nulle ; la somme d'une classe quelconque et du Tout est le Tout. La somme de la classe nulle et d'une classe quelconque est égale à celle-ci ; la partie commune au Tout et à une classe quelconque est égale à celle-ci.

I. P. : L'affirmation simultanée d'une proposition quelconque et d'une proposition fausse équivaut à celle-ci (est fausse) ; tandis que leur affirmation alternative équivaut à la première. L'affirmation simultanée d'une proposition quel-

conque et d'une proposition vraie équivaut à la première; tandis que leur affirmation alternative équivaut à la seconde (est vraie).

Remarque. — Si l'on acceptait comme axiomes les quatre formules précédentes (en raison de l'évidence que leur donne la double interprétation), on pourrait en déduire les formules paradoxales

$$0 < x, \qquad x < 1,$$

en vertu des équivalences établies plus haut

$$(a = ab) = (a < b) = (a + b = b).$$

14. Loi de dualité. — On a pu constater qu'il existe une parfaite symétrie entre les formules relatives à la multiplication et les formules relatives à l'addition. On peut passer des unes aux autres en permutant entre eux les signes d'addition et de multiplication, à la condition de permuter aussi les termes 0 et 1, et de changer le sens du signe $<$ (ou de permuter les deux membres d'une inclusion). Cette symétrie, ou, comme l'on dit, cette *dualité*, existant dans les principes et les définitions, doit subsister dans toutes les formules qu'on en déduira, tant qu'on n'introduira pas quelque principe ou définition qui lui fasse exception. On peut donc déduire d'une formule vraie une autre formule vraie en la transformant par dualité, c'est-à-dire suivant la règle énoncée ci-dessus. C'est en cela que consiste la *loi de dualité* : pratiquement, elle permet de faire l'économie d'une démonstration sur deux. Il importe de remarquer que cette loi dérive des définitions mêmes de l'addition et de la multiplication (dont les formules sont corrélatives par dualité), et non, comme on le croit souvent, des lois de la négation, que nous n'avons pas encore énoncées. Ces lois, comme on va le voir, possèdent la même propriété, et par conséquent conservent la dualité; mais elles ne la fondent pas, et la dualité existerait alors même qu'on n'introduirait pas la notion de la négation. Par exemple, l'égalité (n° 12)

$$ab + ac + bc = (a + b)(a + c)(b + c)$$

est sa propre corrélative par dualité, car ses deux membres se transforment l'un dans l'autre par dualité.

Il importe de remarquer que la loi de dualité ne s'applique qu'aux propositions *primaires :* on appelle ainsi celles qui ne contiennent qu'une copule ($<$ ou $=$). On appelle propositions *secondaires* les propositions dont les deux membres (unis par la copule $<$ ou $=$) sont des propositions primaires : et ainsi de suite. Par exemple, le principe d'identité, le principe de simplification sont des propositions primaires; le principe du syllogisme, le principe de composition sont des propositions secondaires.

15. Définition de la négation. — L'introduction des termes o et 1 va nous permettre de définir la *négation :* c'est une opération « uni-naire », qui transforme un seul terme en un autre terme, qu'on appelle sa *négation* (1). La négation de a s'énonce : non-a, et s'écrit a' (2). Sa définition formelle suppose un postulat d'existence qui est le suivant :

VIII. Quel que soit le terme a, il existe un terme a' tel qu'on ait à la fois

$$aa' = 0, \qquad a + a' = 1.$$

On peut démontrer que, si le terme ainsi défini existe, il est unique, au moyen du *lemme* que voici :

Si l'on a à la fois

$$ac = bc, \qquad a + c = b + c,$$

(1) Le même mot désigne ainsi l'opération et son résultat, ce qui est équivoque. Il faudrait désigner le résultat par un autre mot comme « le *négatif* ». Certains auteurs disent : « le *supplémentaire* ou le *supplément* ». La logique classique employait (surtout pour les propositions) le terme « *contradictoire* ».

(2) Nous adoptons ici la notation de Mac Coll; Schröder désignait non-a par a_1, ce qui empêchait d'affecter les lettres d'indices, et obligeait à mettre les indices en exposants. La notation a' a l'avantage de n'exclure ni les indices ni même les exposants. Quant à la notation $\bar{a}$, employée par beaucoup d'auteurs, elle est incommode pour des raisons typographiques. Lorsque la négation porte sur une proposition écrite sous forme explicite (avec une copule), on l'applique à la copule ($<$ ou $=$) en la barrant verticalement ($\nless$ ou $\neq$). L'accent peut être considéré comme l'amorce d'une barre verticale appliquée aux lettres.

on a aussi

$$a = b.$$

Démonstration. — Multiplions les deux membres de la deuxième prémisse par a,

$$a + ac = ab + ac.$$

Multiplions-les par b,

$$ab + bc = b + bc.$$

En vertu de la première prémisse,

$$ab + ac = ab + bc.$$

Donc

$$a + ac = b + bc,$$

ce qui, en vertu de la loi d'absorption, se réduit à

$$a = b.$$

Remarque. — Cette démonstration repose sur la loi distributive directe; on ne peut donc pas démontrer celle-ci au moyen de la négation sans cercle vicieux (du moins dans le système de principes que nous adoptons).

Ce lemme établi, supposons qu'un même terme a ait deux négations, c'est-à-dire soient a'_1, a'_2 deux termes qui vérifient chacun séparément les conditions de la définition. On va prouver qu'ils sont égaux. En effet, puisque, par hypothèse, on a

$$aa'_1 = 0, \qquad a + a'_1 = 1,$$
$$aa'_2 = 0, \qquad a + a'_2 = 1,$$

on a, en conséquence,

$$aa'_1 = aa'_2, \qquad a + a'_1 = a + a'_2;$$

d'où l'on conclut par le lemme précédent,

$$a'_1 = a'_2.$$

Nous pouvons maintenant parler de *la* négation d'un terme comme d'un terme unique et bien déterminé.

L'*uniformité* de l'opération de négation peut s'exprimer de la manière suivante :

Si $a = b$, on a aussi

$$a' = b'.$$

Cette proposition permet, dans les calculs, de « nier » les deux membres d'une égalité.

16. Principes de contradiction et du milieu exclu. — Par définition, un terme et sa négation vérifient les deux formules

$$aa' = 0, \qquad a + a' = 1,$$

qui traduisent respectivement le *principe de contradiction* et le *principe du milieu exclu* (¹).

I. C. : 1° Les classes a et a' n'ont aucune partie commune; autrement dit, aucun élément n'est à la fois a et non-a;

2° Les classes a et a' réunies forment le tout; autrement dit, tout élément est ou a ou non-a.

I. P. : 1° L'affirmation simultanée des propositions a et non-a est fausse; autrement dit, ces deux propositions ne peuvent être vraies à la fois;

2° L'affirmation alternative des propositions a et non-a est vraie; autrement dit, de ces deux propositions l'une est nécessairement vraie.

Deux propositions, dont l'une est la négation de l'autre, sont dites *contradictoires;* on voit qu'elles ne peuvent être ni vraies ni fausses à la fois. Si l'une est vraie, l'autre est fausse : si l'une est fausse, l'autre est vraie.

Cela concorde avec ce fait que les termes 0 et 1 sont la négation l'un de l'autre; en effet, on a

$$0 \times 1 = 0, \qquad 0 + 1 = 1.$$

Nous dirons, en général, que deux termes sont *contradictoires*, quand l'un est la négation de l'autre.

(¹) Comme l'a fait justement remarquer Mrs. Ladd-Franklin (BALDWIN, *Dictionary of Philosophy and Psychology*, art. *Laws of Thought*), le principe de *contradiction* ne suffit pas à définir les *contradictoires;* il faut lui adjoindre le principe du milieu exclu, qui mériterait tout aussi bien ce nom. C'est pourquoi Mrs. Ladd-Franklin propose de les appeler respectivement *principe d'exclusion* et *principe d'exhaustion :* en vertu du premier, deux termes contradictoires sont *exclusifs* (l'un de l'autre); en vertu du second, ils sont *exhaustifs* (de l'univers du discours).

17. Loi de double négation. — Cette réciprocité est d'ailleurs générale : si un terme b est la négation d'un terme a, le terme a est la négation du terme b. En effet, les deux faits s'expriment par les mêmes formules

$$ab = 0, \qquad a + b = 1,$$

et, de même qu'elles déterminent univoquement b en fonction de a, elles déterminent univoquement a en fonction de b. Cela tient à la symétrie de ces relations, c'est-à-dire à la commutativité de la multiplication et de l'addition. Cette réciprocité s'exprime par la *loi de double négation*

$$(a')' = a,$$

qu'on peut démontrer formellement comme suit : a' étant, par hypothèse, la négation de a, on a

$$aa' = 0, \qquad a + a' = 1.$$

D'autre part, soit a'' la négation de a' ; on a, de même,

$$a'a'' = 0, \qquad a' + a'' = 1.$$

Mais, en vertu du lemme précédent, ces quatre égalités entraînent la suivante :

$$a = a''. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette loi peut s'exprimer de la manière suivante :

Si $b = a'$, on a $a = b'$, et réciproquement (par raison de symétrie).

Cette proposition permet, dans les calculs, de transporter la négation d'un membre à l'autre d'une égalité.

La loi de double négation permet encore de conclure l'égalité de deux termes de l'égalité de leurs négations :

Si $a' = b'$, on a aussi $a = b$,

et, partant, de supprimer la négation des deux membres d'une égalité.

Les formules caractéristiques de la négation, jointes aux propriétés fondamentales de 0 et de 1, ont cette conséquence, que tout produit qui contient deux facteurs contradictoires est nul, et que toute somme qui contient deux sommandes contradictoires est égale à 1.

On a, en particulier, les formules suivantes :

$$a = ab + ab', \qquad a = (a + b)(a + b'),$$

qui se démontrent comme suit :

$$a = a \times 1 = a(b + b') = ab + ab',$$
$$a = a + 0 = a + bb' \quad = (a + b)(a + b'),$$

au moyen de la loi distributive.

Ces formules sont le principe de la méthode de développement, que nous exposerons plus loin (nos **21** et suiv.).

18. Seconde formule de transformation des inclusions en égalités. — Nous pouvons maintenant établir deux équivalences très importantes entre l'inclusion et l'égalité :

$$(a < b) = (ab' = 0), \qquad (a < b) = (a' + b = 1).$$

Démonstration. — 1° Multiplions les deux membres de l'inclusion $a < b$ par b'; il vient

$$(ab' < bb') = (ab' < 0) = (ab' = 0).$$

2° Réciproquement, on sait que

$$a = ab + ab'.$$

Or, si $ab' = 0$,

$$a = ab + 0 = ab.$$

D'autre part : 1° Ajoutons a aux deux membres de l'inclusion $a < b$; il vient

$$(a' + a < a' + b) = (1 < a' + b) = (a' + b = 1);$$

2° On sait que

$$b = (a + b)(a' + b).$$

Or, si $a' + b = 1$,

$$b = (a + b) \times 1 = a + b.$$

Les formules précédentes permettent de transformer une

inclusion en une égalité dont le second membre soit o ou 1, à volonté. On peut aussi transformer en une égalité de cette forme une égalité quelconque, au moyen des formules suivantes :

$$(a = b) = (ab' + a'b = 0), \qquad (a = b) = [(a + b')(a' + b) = 1].$$

Démonstration :

$$(a = b) = (a < b)(b < a) = (ab' = 0)(a'b = 0) = (ab' + a'b = 0),$$
$$(a=b) = (a<b)(b<a) = (a'+b=1)(a+b'=1) = [(a+b')(a'+b)=1].$$

On a encore les deux formules

$$(a = b) = [(a + b)(a' + b') = 0], \qquad (a = b) = (ab + a'b' = 1),$$

qui peuvent se déduire des précédentes, en effectuant les produits indiqués (ou les sommes indiquées) au moyen de la loi distributive.

19. Loi de contraposition. — On peut démontrer maintenant la *loi de contraposition*

$$(a < b) = (b' < a').$$

Démonstration. — En vertu des formules précédentes, on a

$$(a < b) = (ab' = 0) = (b' < a').$$

La loi de contraposition peut encore prendre la forme suivante

$$(a < b') = (b < a'),$$

qui suppose la loi de double négation. Elle peut s'énoncer verbalement comme suit : « On peut permuter les deux membres d'une inclusion, à la condition de les nier tous les deux. »

I. C. : « Si tout a est b, tout non-b est non-a, et réciproquement ».

I. P. : « Si a implique b, non-b implique non-a, et réciproquement »; autrement dit : « Si a est vraie, b est vraie » équivaut à : « Si b est fausse, a est fausse ».

Cette équivalence est le principe des *raisonnements par*

l'absurde (*voir* les raisonnements hypothétiques *modus tollens*, n° 58).

20. Postulat d'existence. — Il convient de formuler ici un dernier axiome, que nous appellerons le *postulat d'existence :*

IX. $$1 \not< 0.$$

d'où l'on déduit aussitôt

$$1 \neq 0.$$

Dans l'I. C., cet axiome signifie que l'univers du discours n'est pas nul, c'est-à-dire qu'il contient quelques éléments, au moins un. S'il n'en contient qu'un, il n'y a que deux classes possibles : 1 et 0. Mais, même alors, elles seront distinctes, et l'axiome précédent sera vérifié.

Dans l'I. P., cet axiome signifie que le vrai n'implique pas le faux ; il a dans ce cas un caractère d'évidence et de nécessité. La proposition contraire : $1 = 0$ est par suite le type de l'*absurdité* (de la proposition formellement fausse), tandis que les propositions $0 = 0$, $1 = 1$ sont les types de l'*identité* (de la proposition formellement vraie). On posera donc

$$(1 = 0) = 0, \quad (0 = 0) = (1 = 1) = 1.$$

Plus généralement, toute égalité de la forme

$$x = x$$

équivaut à l'une des identités-types ; car, si l'on ramène cette égalité au second membre 0 ou 1, on trouve

$$(xx' + xx' = 0) = (0 = 0), \quad (xx + x'x' = 1) = (1 = 1).$$

Au contraire, toute égalité de la forme

$$x = x'$$

équivaut à l'absurdité-type ; car on trouve par le même procédé

$$(xx + x'x' = 0) = (1 = 0), \quad (xx' + xx' = 1) = (0 = 1).$$

21. Développements de 0 et de 1. — Jusqu'ici nous

n'avons rencontré que des formules qui traduisent directement des modes de raisonnement usuels et, par suite, offrent une évidence immédiate.

Nous allons maintenant exposer des théories et des méthodes qui s'éloignent des manières habituelles de penser, et qui constituent plus spécialement l'Algèbre de la Logique, en tant que méthode formelle et pour ainsi dire automatique, d'une généralité absolue et d'une certitude infaillible, remplaçant le raisonnement par le calcul.

Le procédé fondamental de cette méthode est le *développement*. Étant donnés des termes a, b, c, ... en nombre fini quelconque, on peut développer o et 1 respectivement par rapport à ces termes (et à leurs négations) par les formules suivantes, qui résultent de la loi distributive :

$$0 = aa',$$
$$0 = aa' + bb' = (a + b)(a + b')(a' + b)(a' + b'),$$
$$0 = aa' + bb' + cc' = (a + b + c)(a + b + c')(a + b' + c)$$
$$\times (a + b' + c')(a' + b + c)$$
$$\times (a' + b + c')(a' + b' + c)(a' + b' + c'),$$
$$1 = a + a',$$
$$1 = (a + a')(b + b') = ab + ab' + a'b + a'b',$$
$$1 = (a + a')(b + b')(c + c') = abc + abc' + ab'c + ab'c'$$
$$+ a'bc + a'bc' + a'b'c + a'b'c',$$

et ainsi de suite. En général, pour un nombre n de termes simples, o sera développé en un produit d'un nombre 2^n de facteurs, et 1 en une somme d'un nombre 2^n de sommandes. Les facteurs de o sont toutes les combinaisons additives, et les sommandes de 1, toutes les combinaisons multiplicatives des n termes donnés et de leurs négations, chaque combinaison comprenant n termes différents, et ne comprenant jamais à la fois un terme et sa négation.

Les sommandes du développement de 1 sont ce que Boole appelait les *constituants* (de l'univers du discours). On peut aussi les appeler, avec Poretsky, les *minima* du discours, parce que ce sont les plus petites classes en lesquelles se répartit l'univers du discours quand on tient compte des n termes donnés; et l'on appellera de même les facteurs du

développement de o les *maxima* du discours, parce que ce sont les plus grandes classes qu'on puisse déterminer dans l'univers du discours au moyen des n termes donnés.

22. Propriétés des constituants. — Les constituants, ou *minima* du discours, possèdent les deux propriétés caractéristiques des termes contradictoires (dont ils sont une généralisation) : ils sont *mutuellement exclusifs*, c'est-à-dire que le produit de deux quelconques d'entre eux est nul; et *collectivement exhaustifs*, c'est-à-dire que leur somme à tous « épuise » l'univers du discours. Cette dernière propriété est évidente d'après les formules précédentes; l'autre résulte de ce fait, que deux constituants quelconques diffèrent au moins par le « signe » de l'un des termes qui y figurent en facteur, c'est-à-dire que l'un contient en facteur ce terme et l'autre la négation de ce terme. Cela suffit, comme on sait, pour que leur produit soit nul.

Les maxima du discours possèdent des propriétés analogues et corrélatives : leur produit à tous est égal à o, comme on l'a vu; et la somme de deux quelconques d'entre eux est égale à 1, attendu qu'ils diffèrent au moins par le signe de l'un des termes qui y entrent comme sommandes.

Pour simplifier, nous nous restreindrons, avec Boole et Schröder, à l'étude des constituants ou minima du discours, c'est-à-dire des développements de 1. Nous laisserons au lecteur le soin de trouver et de démontrer les théorèmes corrélatifs qui concernent les maxima du discours ou les développements de o.

23. Fonctions logiques. — Nous appellerons *fonction logique* tout terme dont l'expression est complexe, c'est-à-dire formée au moyen des lettres qui désignent les termes simples, et des signes des trois opérations logiques [1]. On peut considérer une fonction logique comme fonction de tous les termes du discours, ou seulement de quelques-uns d'entre eux, qu'on regardera comme inconnus ou variables

[1] Dans cette Algèbre, la fonction logique est l'analogue de la *fonction entière* de l'Algèbre ordinaire, avec cette différence qu'il n'y a pas de puissances autres que la première.

(et que, dans ce cas, on désignera par les lettres x, y, z). On représentera une fonction des variables ou inconnues x, y, z par le symbole $f(x, y, z)$ ou d'autres analogues, comme dans l'Algèbre ordinaire. Une fois pour toutes, on peut considérer une fonction logique comme une fonction de n'importe quel terme du discours, qu'il figure ou non dans son expression explicite.

24. Loi du développement. — Cela posé, soit à développer une fonction $f(x)$ par rapport à x; supposons le problème résolu, et soit

$$ax + bx'$$

le développement cherché.

On a, par hypothèse, l'égalité

$$f(x) = ax + bx'$$

pour toutes les valeurs possibles de x. Faisons $x = 1$ et, par conséquent, $x' = 0$; il vient

$$f(1) = a.$$

Faisons ensuite $x = 0$ et $x' = 1$; il vient

$$f(0) = b.$$

Ces deux égalités déterminent les coefficients a et b du développement; il s'écrira donc comme suit :

$$f(x) = f(1)x + f(0)x',$$

$f(1)$, $f(0)$ représentant ce que devient la fonction $f(x)$ quand on y fait respectivement $x = 1$, $x = 0$.

Corollaire. — Si l'on multiplie les deux membres des égalités précédentes tour à tour par x et par x', on trouve les couples d'égalités (Mac Coll)

$$xf(x) = ax, \qquad x'f(x) = bx',$$
$$xf(x) = xf(1), \qquad x'f(x) = x'f(0).$$

Soit maintenant à développer une fonction de deux variables (ou davantage) par rapport aux deux variables x, y.

Si l'on développe $f(x, y)$ d'abord par rapport à x, on trouve

$$f(x, y) = f(1, y)x + f(0, y)x'.$$

Développons ensuite le second membre par rapport à y; il vient

$$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)xy' + f(0, 1)x'y + f(0, 0)x'y'.$$

Ce résultat est symétrique par rapport aux deux variables, et, par suite, indépendant de l'ordre dans lequel on effectue les développements relatifs à chacune d'elles.

On pourrait de même obtenir progressivement le développement d'une fonction de 3, de 4, ... variables.

La loi générale de ces développements est la suivante :

Pour développer une fonction par rapport à n variables, on forme tous les constituants de ces n variables, et l'on multiplie chacun d'eux par la valeur que prend la fonction quand on y égale à 1 chacun des facteurs simples du constituant correspondant (ce qui revient à égaler à 0 ceux dont la négation figure dans ce constituant).

Dans le cas où une variable par rapport à laquelle on développe, y par exemple, ne figure pas explicitement dans la fonction [$f(x)$ par exemple], on a, d'après la règle générale,

$$f(x) = f(x)y + f(x)y'.$$

En particulier, si a est un terme constant (indépendant des variables par rapport auxquelles on développe), on a, pour ses développements successifs,

$$a = ax = ax',$$
$$a = axy + axy' + ax'y + ax'y',$$
$$a = axyz + axyz' + axy'z + axy'z' + ax'yz + ax'yz' + ax'y'z + ax'y'z' \quad [1],$$

et ainsi de suite. On obtiendrait d'ailleurs directement ces formules en multipliant par a les deux membres de chaque développement de 1.

[1] Ces formules expriment la méthode de classification par dichotomie.

Corollaires. — 1° On a l'équivalence

$$(a + x')(b + x) = ax + bx' + ab = ax + bx'.$$

En effet, si l'on développe par rapport à x, on trouve

$$ax + bx' + abx + abx' = (a + ab)x + (b + ab)x' = ax + bx'.$$

2° On a l'équivalence

$$ax + bx' + c = (a + c)x + (b + c)x'.$$

En effet, si l'on developpe le terme c par rapport à x, on trouve

$$ax + bx' + cx + cx' = (a + c)x + (b + c)x'.$$

Ainsi, quand une fonction contient des termes indépendants de x (dont la somme est représentée par c), on peut toujours la ramener à la forme développée $ax + bx'$ en ajoutant c tant au coefficient de x qu'à celui de x'. Par suite, on peut toujours supposer une fonction ramenée à cette forme.

Pratiquement, on effectue le développement en multipliant chaque terme qui ne contient pas une certaine lettre (x par exemple) par $(x + x')$ et en développant le produit en vertu de la loi distributive. Puis on réduit, s'il y a lieu, les termes semblables en un seul.

25. Formules de De Morgan. — *Dans un développement quelconque de* 1, *la somme d'un certain nombre de constituants est la négation de la somme de tous les autres.*

En effet, la somme de ces deux sommes est, par hypothèse, égale à 1, et leur produit est égal à 0, puisque le produitde deux constituants différents est nul.

De cette proposition on peut déduire les *formules de De Morgan :*

$$(a + b)' = a'b', \qquad (ab)' = a' + b'.$$

Démonstration. — Développons la somme $(a + b)$:

$$a + b = ab + ab' + ab + a'b = ab + ab' + a'b.$$

Or le développement de 1 par rapport à a et b contient les trois termes de ce développement, plus un quatrième terme $a'b'$. Celui-ci est donc la négation de la somme des trois autres.

On peut démontrer la deuxième formule, soit par un raisonnement corrélatif (en considérant le développement de 0 en facteurs), soit en remarquant que le développement de $(a'+b')$

$$a'b+ab'+a'b'$$

ne diffère du développement de 1 que par le sommande ab.

La généralisation des formules de De Morgan est manifeste ; par exemple on a, pour une somme de trois termes,

$$a+b+c=abc+abc'+ab'c+ab'c'+a'bc+a'bc'+a'b'c.$$

Ce développement ne diffère du développement de 1 que par le terme $a'b'c'$; on démontrerait ainsi les formules

$$(a+b+c)'=a'b'c', \qquad (abc)'=a'+b'+c',$$

généralisations des formules de De Morgan.

Les formules de De Morgan sont d'un usage très fréquent dans le calcul, car elles permettent d'*effectuer* la négation d'une somme ou d'un produit en faisant porter la négation sur les termes simples : la négation d'une somme est le produit des négations des sommandes ; la négation d'un produit est la somme des négations des facteurs.

Ces formules permettent encore de passer d'une proposition primaire à la proposition corrélative par dualité, et de démontrer leur équivalence. Pour cela, il suffit d'appliquer à la proposition donnée la loi de contraposition, puis d'*effectuer* la négation des deux membres.

Exemple :

$$ab+ac+bc=(a+b)(a+c)(b+c).$$

Démonstration :

$$(ab+ac+bc)=[(a+b)(a+c)(b+c)]'$$
$$(ab)'(ac)'(bc)'=(a+b)'+(a+c)'+(b+c)'$$
$$(a'+b')(a'+c')(b'+c')=a'b'+a'c'+b'c'.$$

Les termes simples a, b, c étant quelconques, on peut supprimer le signe de négation dont ils sont affectés, et l'on retrouve la formule donnée.

Ainsi les formules de De Morgan fournissent un moyen de trouver ou de démontrer la formule corrélative d'un autre; mais, ainsi que nous l'avons dit (n° 14), elles ne sont pas le fondement de cette corrélation.

26. Sommes disjointes. — On peut au moyen du développement, transformer une somme quelconque en une somme *disjointe*, c'est-à-dire telle que tous les produits des sommandes deux à deux soient nuls. En effet, soit la somme $(a + b + c)$ dont on ne sait pas si les trois termes sont disjoints; on doit supposer qu'ils ne le sont pas. On a par développement :

$$a + b + c = abc + abc' + ab'c + ab'c' + a'bc + a'bc' + a'b'c.$$

Or les quatre premiers termes de ce développement constituent le développement de a par rapport à b et c; les deux suivants sont le développement de $a'b$ par rapport à c. La somme précédente se réduit donc à

$$a + a'b + a'b'c,$$

et les termes de celle-ci sont disjoints comme ceux de la précédente, ainsi qu'on peut le vérifier. Ce procédé est général, et d'ailleurs évident : pour énumérer, sans répétition, tous les a, tous les b, tous les c, ..., il suffit évidemment d'énumérer tous les a, puis tous les b qui ne sont pas a, puis tous les c qui ne sont ni a ni b, et ainsi de suite.

On remarquera que l'expression ainsi obtenue n'est pas symétrique, puisqu'elle dépend de l'ordre assigné aux sommandes primitifs ; ainsi la même somme pourra s'écrire :

$$b + ab' + a'b'c, \quad c + ac' + a'bc', \quad \ldots.$$

Inversement, pour simplifier l'expression d'une somme, on peut supprimer comme facteur dans chacun des sommandes (rangés dans un ordre convenable) les négations de chacun des sommandes précédents. On peut ainsi trouver pour une

somme une expression symétrique. Par exemple on a

$$a + a'b = b + ab' = a + b.$$

27. Propriétés des fonctions développées. — Ce qui fait l'utilité pratique du procédé de développement dans l'Algèbre de la Logique, c'est que les fonctions développées possèdent la propriété suivante :

La somme ou le produit de deux fonctions développées par rapport aux mêmes lettres s'effectuent en faisant simplement la somme ou le produit de leurs coefficients ; la négation d'une fonction développée s'effectue en niant simplement les coefficients de son développement.

Nous allons démontrer ces propositions dans le cas de deux variables ; la démonstration sera évidemment générale.

Soient les fonctions développées

$$a_1xy + b_1xy' + c_1x'y + d_1x'y',$$
$$a_2xy + b_2xy' + c_2x'y + d_2x'y' :$$

1° Je dis que leur somme est

$$(a_1 + a_2)xy + (b_1 + b_2)xy' + (c_1 + c_2)x'y + (d_1 + d_2)x'y'$$

Cela résulte immédiatement de la loi distributive.

2° Je dis que leur produit est

$$a_1a_2xy + b_1b_2xy' + c_1c_2x'y + d_1d_2x'y'.$$

En effet, si l'on effectue leur produit suivant la règle générale (en appliquant la loi distributive), les produits de deux termes de constituants différents seront tous nuls ; il ne restera donc que les produits des termes de même constituant, et comme (en vertu de la loi de tautologie) le produit de ce constituant par lui-même lui est égal, il suffit de faire le produit des coefficients.

3° Enfin, je dis que la négation de

$$axy + bxy' + cx'y + dx'y'$$

est

$$a'xy + b'xy' + c'x'y + d'x'y'.$$

Pour le prouver, il suffit de vérifier que le produit de ces deux fonctions est nul, et que leur somme est égale à 1. En

effet :

$$(axy + bxy' + cx'y + dx'y')(a'xy + b'xy' + c'x'y + d'x'y')$$
$$= (aa'xy + bb'xy' + cc'x'y + dd'x'y')$$
$$= (0.xy + 0.xy' + 0.x'y + 0.x'y') = 0;$$

$$axy + bxy' + cx'y + dx'y') + (a'xy + b'xy' + c'x'y + d'x'y')$$
$$= [(a + a')xy + (b + b')xy' + (c + c')x'y + (d + d')x'y']$$
$$= (1.xy + 1.xy' + 1.x'y + 1.x'y') = 1.$$

Cas particulier. — On a les égalités :

$$(ab + a'b')' = ab' + a'b,$$
$$(ab' + a'b)' = ab + a'b',$$

qu'on peut démontrer de bien d'autres manières, par exemple, en remarquant que les deux sommes $(ab + a'b')$ et $(ab' + a'b)$ composent, réunies, le développement de 1 ; ou encore en *effectuant* la négation $(ab + a'b')'$ au moyen des formules de De Morgan.

De ces égalités on peut conclure celle-ci :

$$(ab' + a'b = 0) = (ab + a'b' = 1),$$

qu'on aurait pu trouver d'ailleurs en remarquant que (n° **18**)

$$(a = b) = (ab' + a'b = 0) = [(a + b')(a' + b) = 1],$$

et en effectuant le produit indiqué dans la dernière expression.

Théorème. — *On a les équivalences suivantes* [1] :

$$(a = bc' + b'c) = (b = ac' + a'c) = (c = ab' + a'b).$$

En effet, ramenons la première de ces égalités au second membre 0

$$a(bc + b'c') + a'(bc' + b'c) = 0,$$
$$abc + ab'c' + a'bc' + a'b'c = 0.$$

Or on constate que le premier membre de cette égalité est symétrique par rapport aux trois termes a, b, c. On en

[1] Stanley Jevons, *Pure Logic*, 1864, p. 61.

conclut que, si l'on effectuait la même transformation sur les deux autres égalités, qui ne diffèrent de la première que par la permutation de ces trois lettres, on aboutirait au même résultat ; ce qui démontre l'équivalence proposée.

Corollaire. — Si l'on a à la fois les trois inclusions :

$$a < bc' + b'c, \qquad b < ac' + a'c, \qquad c < ab' + a'b,$$

on a aussi les inclusions inverses, et par suite les égalités correspondantes

$$a = bc' + b'c, \qquad b = ac' + a'c, \qquad c = ab' + a'b.$$

En effet, si l'on transforme les inclusions données en égalités, on trouve

$$abc + ab'c' = 0, \qquad abc + a'bc' = 0, \qquad abc + a'b'c = 0,$$

d'où, en les réunissant en une seule,

$$abc + ab'c' + a'bc' + a'b'c = 0.$$

Or cette égalité équivaut, on vient de le voir, à l'une quelconque des trois égalités à démontrer.

28. Bornes d'une fonction. — On dit qu'un terme x est *compris entre* deux termes donnés a et b, s'il contient l'un et est contenu dans l'autre, c'est-à-dire si l'on a, par exemple,

$$a < x, \qquad x < b,$$

ce qu'on écrit, par abréviation,

$$a < x < b.$$

Une telle formule s'appelle une *double inclusion*. Dans le cas où le terme x est variable et toujours compris entre deux termes constants a et b, ceux-ci seront appelés les *bornes* de celui-là. Le premier (contenu dans x) sera la *borne inférieure*, le second (qui contient x) sera la *borne supérieure*.

Théorème. — *Une fonction développée est comprise entre la somme et le produit de ses coefficients.*

Démontrons d'abord le théorème pour une fonction d'une

variable :

$$ax + bx'.$$

On a, d'une part,

$$(ab < a) < (abx < ax),$$
$$(ab < b) < (abx' < bx').$$

Donc

$$abx + abx' < ax + bx'$$

ou

$$ab < ax + bx'.$$

On a, d'autre part,

$$(a < a + b) < [ax < (a + b)x],$$
$$(b < a + b) < [bx' < (a + b)x'].$$

Donc

$$ax + bx' < (a + b)(x + x')$$

ou

$$ax + bx' < a + b.$$

En résumé,

$$ab < ax + bx' < a + b. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarques. — 1° La même double inclusion peut se mettre sous la forme suivante (¹) :

$$f(b) < f(x) < f(a).$$

En effet,

$$f(a) = aa + ba' = a + b,$$
$$f(b) = ab + bb' = ab.$$

Mais cette forme, particulière à l'équation à une inconnue, ne paraît pas susceptible de généralisation, tandis que la précédente l'est. Et, en effet, on constate aisément que la démonstration précédente est générale. Quel que soit le nombre n des variables (et par suite le nombre 2^n des constituants), on démontrera exactement de même que la fonction contient le produit de ses coefficients et est contenue dans leur somme. Le théorème est donc général.

2° Ce théorème suppose que tous les constituants figurent dans le développement, par conséquent ceux qui manquent doivent y figurer avec le coefficient o. Dans ce cas, le pro-

(¹) EUGEN MÜLLER, *Aus der Algebra der Logik*, Art. II.

duit de tous les coefficients est évidemment nul. De même, dans le cas où un coefficient a la valeur 1, la somme de tous les coefficients est égale à 1.

On démontrera plus tard (n° 38) que la fonction peut atteindre ses deux bornes, et par suite qu'elles sont ses valeurs extrêmes. Pour le moment, nous savons seulement qu'elle est toujours comprise entre elles.

29. Formule de Poretsky (¹). — On a l'équivalence

$$(x = ax + bx') = (b < x < a).$$

Démonstration. — Multiplions d'abord les deux membres de l'égalité proposée par x, il vient

$$x = ax,$$

ce qui, comme on sait, équivaut à l'inclusion

$$x < a.$$

Multiplions ensuite les deux membres par x'; il vient

$$0 = bx',$$

ce qui, comme on sait, équivaut à l'inclusion

$$b < x.$$

On a donc en résumé

$$(x = ax + bx') < (b < x < a).$$

Réciproquement, on a

$$(b < x < a) < (x = ax + bx').$$

En effet,

$$(x < a) = (x = ax),$$
$$(b < x) = (bx' = 0).$$

Ajoutons membre à membre ces deux égalités

$$(x = ax)(0 = bx') < (x = ax + bx').$$

(¹) PORETSKY, *Sur les méthodes pour résoudre les égalités logiques* (*Bulletin de la Société physico-mathématique de Kazan*, t. II, 1884).

Donc

$$(b < x < a) \quad (x = ax + bx').$$

L'équivalence est ainsi démontrée.

30. Théorème de Schröder (¹). — L'égalité

$$ax + bx' = 0$$

signifie que x est compris entre a' et b.

Démonstration :

$$(ax + bx' = 0) = (ax = 0)\,(bx' = 0),$$
$$(ax = 0) = (x < a'),$$
$$(bx' = 0) = (b < x).$$

Donc

$$(ax + bx' = 0) = (b < x < a').$$

En rapprochant ce théorème de la formule de Poretsky, on obtient immédiatement l'égalité

$$(ax + bx' = 0) = (x = a'x + bx')$$

qui peut se démontrer directement, en réduisant la formule de Poretsky à une égalité à second membre nul

$$(x = a'x + bx') = [x(ax + b'x') + x'(a'x + bx') = 0]$$
$$= (ax + bx' = 0).$$

Si l'on considère l'égalité donnée comme une *équation* où x est l'inconnue, la formule de Poretsky en sera la solution.

De la double inclusion

$$b < x < a',$$

on conclut par le principe du syllogisme

$$b < a'.$$

C'est là une conséquence de l'égalité donnée, et cette con-

(¹) SCHRÖDER, *Operationskreis des Logikkalkuls*, Théorème 20, 1877.

séquence est indépendante de l'inconnue x. On l'appelle la *résultante de l'élimination* de x dans l'équation donnée. Elle équivaut à l'égalité

$$ab = 0.$$

On a donc l'implication suivante :

$$(ax + bx' = 0) < (ab = 0).$$

Si l'on tient compte de cette conséquence, la solution peut se simplifier : en effet,

$$(ab = 0) = (b = a'b).$$

Donc

$$\begin{aligned} x &= a'x + bx' = a'x + a'bx' \\ &= a'bx + a'b'x + a'bx' = a'b + a'b'x \\ &= b + a'b'x = b + a'x. \end{aligned}$$

Cette forme de la solution est la plus conforme au sens commun : puisque x contient b et est contenu dans a', il est naturel que x soit égal à la somme de b et d'une partie de a' (à savoir la partie commune à a' et à x). La solution est en général indéterminée (entre les bornes a' et b) ; elle n'est déterminée que dans le cas où ces bornes sont égales

$$a' = b,$$

car alors

$$x = b + a'x = b + bx = b = a'.$$

Et, en effet, l'équation prend alors la forme

$$(ax + a'x' = 0) = (a' = x)$$

et elle équivant à la double inclusion

$$(a' < x < a') = (x = a').$$

31. Résultante de l'élimination. — Lorsque ab n'est pas nul, l'équation est impossible (toujours fausse), puisqu'elle a une conséquence fausse. C'est pour cela que Schröder considère la résultante de l'élimination comme une *condition* de l'équation. Mais il ne faut pas se laisser induire en erreur par ce mot équivoque : la résultante n'est pas une *cause* de l'équation, elle en est une *conséquence ;* elle n'en est pas une condition *suffisante*, mais une condition *nécessaire*.

On arriverait à la même conclusion en remarquant que ab est la borne inférieure de la fonction $ax + bx'$, et que, par suite, celle-ci ne peut s'annuler que si cette borne est o

$$(ab < ax + bx')(ax + bx' = 0) < (ab = 0).$$

On peut mettre la résultante de l'élimination sous d'autres formes équivalentes : par exemple, si l'on écrit l'équation sous la forme

$$(a + x')(b + x) = 0,$$

on remarque que la résultante

$$ab = 0$$

s'obtient en effaçant simplement l'inconnue (en supprimant les termes x et x'). L'équation peut encore s'écrire

$$a'x + b'x' = 1$$

et la résultante

$$a' + b' = 1.$$

Ici encore elle s'obtient en effaçant simplement l'inconnue [1].

Remarque. — Si l'on substitue à l'inconnue x, dans l'équation

$$ax + bx' = 0,$$

[1] C'est la méthode d'élimination de Miss Ladd et de M. Mitchell. Mais cette règle, sous sa simplicité apparente, est trompeuse, car on ne peut pas l'appliquer à la même équation mise sous une des formes

$$ax + bx' = 0, \qquad (a' + x')(b' + x) = 1.$$

Or, pour les inéquations, au contraire, elle s'applique, comme on le verra (n° 54), aux formes

$$ax + bx' \neq 0, \qquad (a' + x')(b' + x) \neq 1$$

et non pas aux formes équivalentes

$$(a + x')(b + x) \neq 0, \qquad a'x + b'x' \neq 1.$$

Par conséquent, elle n'a pas la commodité mnémonique qu'on lui attribue, car pour l'employer correctement il faut se rappeler à quelles formes elle est applicable.

sa valeur tirée de cette équation

$$x = a'x + bx', \qquad x' = ax + b'x',$$

on trouve

$$(abx + abx' = 0) = (ab = 0),$$

c'est-à-dire précisément la résultante de l'élimination de x, laquelle, on l'a vu, est une conséquence de l'équation elle-même. On s'assure ainsi que la valeur de x vérifie bien cette équation. On peut donc (avec M. Voigt) définir la solution d'une équation : la valeur qui, substituée à x dans cette équation, la réduit à la résultante de l'élimination de x.

Cas particulier. — Dans le cas où l'équation contient un terme indépendant de x, c'est-à-dire est de la forme

$$ax + bx' + c = 0,$$

elle équivaut à

$$(a + c)x + (b + c)x' = 0,$$

et la résultante est

$$(a + c)(b + c) = ab + c = 0.$$

D'où l'on conclut cette règle pratique : pour obtenir dans ce cas la résultante de l'élimination de x, il suffit d'égaler à zéro le produit des coefficients x et x', en lui ajoutant le terme indépendant de x.

32. Cas d'indétermination. — De même que la résultante

$$ab = 0$$

correspond au cas de possibilité de l'équation, l'égalité

$$a + b = 0$$

correspond au cas d'*indétermination absolue*. En effet, dans ce cas, l'équation ayant ses deux coefficients nuls $(a = 0)$, $(b = 0)$, se réduit à une identité $(0 = 0)$, et par suite est « identiquement » vérifiée quelle que soit la valeur de x; elle ne détermine nullement celle-ci, puisque la double inclusion

$$b < x < a'$$

devient alors

$$o < x < 1,$$

ce qui ne limite en aucune manière la variabilité de x. On dit dans ce cas que l'équation est *indéterminée.*

On arriverait à la même conclusion en remarquant que $(a + b)$ est la borne supérieure de la fonction $ax + bx'$, et que, si cette borne est o, la fonction est forcément nulle pour toute valeur de x :

$$(ax + bx' < a + b)(a + b = o) < (ax + bx' = o).$$

Cas particulier. — Lorsque l'équation contient un terme indépendant de x :

$$ax + bx' + c = o,$$

la condition d'indétermination absolue prend la forme

$$a + b + c = o.$$

En effet,

$$ax + bx' + c = (a + c)x + (b + c)x',$$

$$(a + c) + (b + c) = a + b + c = o.$$

33. Sommes et produits de fonctions. — Il importe d'introduire ici une notation empruntée aux Mathématiques et qui est très commode dans l'Algèbre de la Logique. Soit une expression qui contient une variable $f(x)$; supposons que l'ensemble des valeurs que peut prendre x soit bien déterminé ; l'ensemble des valeurs que prend en conséquence la fonction $f(x)$ sera aussi bien déterminé. Leur somme sera représentée par $\sum_x f(x)$, et leur produit par $\prod_x f(x)$. C'est une notation nouvelle, disons-nous, et non une notion nouvelle ; car c'est simplement l'idée de somme et de produit appliquée aux valeurs d'une fonction.

Lorsque les signes $\sum$ et $\prod$ s'appliquent à des propositions, ils prennent un sens intéressant :

$$\prod [f(x) = o]$$

signifie que $f(x) = 0$ est vraie pour *toutes* les valeurs de x, et

$$\sum_x [f(x) = 0]$$

que $f(x) = 0$ est vraie pour *quelque* valeur de x. En effet, pour qu'un produit soit égal à 1 (c'est-à-dire vrai), il faut que tous ses facteurs soient égaux à 1 (c'est-à-dire vrais); mais, pour qu'une somme soit égale à 1 (c'est-à-dire vraie), il suffit qu'un de ses sommandes soit égal à 1 (c'est-à-dire vrai). On a ainsi un moyen de traduire les propositions universelles et particulières, lorsqu'elles s'appliquent à des variables, notamment celles de la forme : « Pour tout x, telle proposition est vraie » ; « Pour quelque x, telle proposition est vraie », etc.

Par exemple, l'équivalence suivante

$$(a = b) = (ac = bc)(a + c = b + c)$$

a quelque chose de paradoxal, parce qu'il figure dans le second membre un terme (c) qui ne figure pas dans le premier. C'est que cette équivalence est indépendante de c ; de sorte qu'on peut l'écrire comme suit (en considérant c comme une variable x) :

$$\prod_x [(a = b) = (ax = bx)(a + x = b + x)],$$

ou, le premier membre étant indépendant de x,

$$(a = b) = \prod_x [(ax = bx)(a + x = b + x)].$$

En général, quand une proposition contient un terme variable, il faut avoir grand soin de distinguer le cas où elle est vraie pour *toute* valeur de la variable du cas où elle est vraie pour *quelque* valeur seulement de la variable [1]. C'est à cela que servent les signes $\prod$ et $\sum$.

[1] C'est la distinction qu'on fait en Mathématiques entre les *identités* et les *équations*, à cela près qu'une équation peut n'être vérifiée par aucune valeur de la variable.

Ainsi, quand on dit que l'équation

$$ax + bx' = 0,$$

par exemple, est possible, on affirme qu'elle est vérifiée par quelque valeur de x, c'est-à-dire

$$\sum_x (ax + bx' = 0),$$

et, comme la condition nécessaire et suffisante pour cela est que la résultante $(ab = 0)$ soit vraie, on doit écrire

$$\sum_x (ax + bx' = 0) = (ab = 0),$$

tandis qu'on a seulement l'implication

$$(ax + bx' = 0) < (ab = 0).$$

Au contraire, pour que l'équation soit vérifiée par toute valeur de x, la condition nécessaire et suffisante est que

$$a + b = 0.$$

Démonstration. — 1° La condition est suffisante ; car si

$$(a + b = 0) = (a = 0)(b = 0),$$

on a évidemment

$$ax + bx' = 0,$$

quel que soit x, c'est-à-dire

$$\prod_x (ax + bx' = 0).$$

2° La condition est nécessaire ; car si

$$\prod_x (ax + bx' = 0),$$

l'équation est vraie en particulier par la valeur $x = a$, c'est-à-dire qu'on a

$$a + b = 0.$$

L'équivalence

$$\prod_x (ax + bx' = 0) = (a + b = 0)$$

est donc démontrée ([1]). Dans ce cas l'équation se réduit à une *identité :* son premier membre est *identiquement* nul.

34. Expression d'une inclusion au moyen d'une indéterminée. — La notation précédente est indispensable dans presque tous les cas où l'on fait figurer dans l'un des membres d'une équivalence des variables ou indéterminées qui ne figurent pas dans l'autre. Par exemple, certains auteurs posent les deux équivalences suivantes

$$(a < b) = (a = bu) = (a + v = b),$$

où u, v sont deux « indéterminées ». Or chacune des deux égalités a bien pour conséquence l'inclusion $(a < b)$, comme on peut s'en assurer en éliminant de ces égalités u et v respectivement :

1° $$[a(b' + u') + a'bu = 0] = [(ab' + a'b)u + au' = 0].$$

Résultante

$$[(ab' + a'b)a = 0] = (ab' = 0) = (a < b).$$

2° $$[(a + v)b' + a'bv' = 0] = [b'v + (ab' + a'b)v' = 0].$$

Résultante

$$[b'(ab' + a'b) = 0] = (ab' = 0) = (a < b).$$

Mais on ne peut pas dire que, réciproquement, l'inclusion implique les deux égalités *pour n'importe quelle valeur* de u et v ; et, en fait, on se borne à prouver que cette implication a lieu pour *quelque* valeur de u et de v, à savoir pour les valeurs particulières

$$u = a, \qquad b = v ;$$

et, en effet, on a

$$(a = ab) = (a < b) = (a + b = b).$$

([1]) Eugen Müller, *loc. cit.*

Mais de ce que l'implication (et par suite l'équivalence) est vraie pour *quelque* valeur des indéterminées, on ne peut pas conclure qu'elle est vraie pour *toutes;* notamment, elle n'est pas vraie pour les valeurs particulières

$$u = 1, \qquad v = 0,$$

car alors $(a = bu)$ et $(a + v = b)$ deviennent $(a = b)$, qui dépasse évidemment l'inclusion donnée $(a < b)$ (¹).

On ne peut donc écrire que les équivalences suivantes :

$$(a < b) = \sum_u (a = bu) = \sum_v (a + v = b),$$

mais il n'y a pas équivalence entre les trois expressions

$$(a < b), \qquad \prod_u (a = bu), \qquad \prod_v (a + v = b) \quad (^2).$$

35. Expression d'une double inclusion au moyen d'une indéterminée. — Théorème : *La double inclusion*

$$b < x < a$$

(¹) De même, si l'on fait

$$u = 0, \qquad v = 1,$$

on obtient les égalités

$$(a = 0), \qquad (b = 1),$$

qui dépassent encore plus l'inclusion donnée.

(²) D'après la remarque faite dans la note précédente, on a manifestement

$$\prod_u (a = bu) = (a = b = 0), \qquad \prod_v (a + v = b) = (a = b = 1),$$

puisque les égalités soumises au signe $\prod$ doivent être vérifiées même par les valeurs

$$u = 0, \quad u = 1 \quad \text{et} \quad v = 0, \quad v = 1.$$

Si l'on veut savoir dans quelles limites peuvent varier les ndéter-

équivaut à l'égalité

$$x = au + bu'$$

jointe à la condition $(b < a)$, *u étant un terme absolument indéterminé.*

Démonstration. — Développons l'égalité en question

$$x(a'u + b'u') + x'(au + bu') = 0,$$
$$(a'x + ax')u + (b'x + bx')u' = 0.$$

Éliminons-en u

$$a'b'x + abx' = 0.$$

Cette égalité équivaut à la double inclusion

$$ab < x < a + b.$$

Mais, par hypothèse, on a

$$(b < a) = (ab = b) = (a + b = a).$$

La double inclusion se réduit donc à

$$b < x < a.$$

minées u et v, il snffit de résoudre par rapport à elles les équations

$$(a < b) = (a = bu), \qquad (a < b) = (a + v = b),$$

ou

$$ab' = a'bu + ab' + au', \qquad ab' = ab' + b'v + a'bv',$$

ou

$$a'bu + abu' = 0, \qquad a'b'v + a'bv' = 0,$$

d'où (par une formule démontrée plus loin) on tire les solutions

$$u = ab + w(a + b'), \qquad v = a'b + w(a + b),$$

ou simplement

$$u = ab + wb', \qquad v = a'b + wa,$$

w étant absolument indéterminée. On trouverait ces solutions par le simple bon sens, en se demandant : Par quel terme faut-il multiplier b pour obtenir a ? Par un terme qui contienne ab plus une partie quelconque de non-b. Quel terme faut-il ajouter à a pour obtenir b ? Un terme qui contienne $a'b$ plus une partie quelconque de a. En un mot, u peut varier entre ab et $a + b'$, v entre $a'b$ et $a + b$.

Ainsi, quel que soit u, l'égalité considérée entraîne la double inclusion. Inversement, la double inclusion entraîne l'égalité, quel que soit x; car elle équivaut à

$$a'x + bx' = 0,$$

et alors l'égalité se simplifie et se réduit à

$$ax'u + b'xu' = 0.$$

On peut toujours en tirer la valeur de u en fonction de x, car la résultante ($ab'xx' = 0$) est identiquement vérifiée. La solution est donnée par la double inclusion

$$b'x < u < a' + x.$$

Remarque. — Il n'y a pas contradiction entre ce résultat, qui montre que la valeur de u est comprise entre des bornes, et l'assertion antérieure, que u est absolument indéterminé. En effet, celle-ci suppose que x est quelconque, pourvu qu'il vérifie la double inclusion; tandis que, quand on évalue u en fonction de x, on suppose la valeur de x déterminée; et c'est par rapport à cette valeur particulière de x que la valeur de u est soumise à des bornes (¹).

Pour que la valeur de u soit complètement déterminée, il faut et il suffit qu'on ait

$$b'x = a' + x,$$

c'est-à-dire

$$b'xax' + (b + x')(a' + x) = 0$$

ou

$$bx + a'x' = 0.$$

Or on a déjà, par hypothèse,

$$a'x + bx' = 0.$$

Si l'on réunit ces deux égalités, on trouve

$$(a' + b = 0) = (a = 1)(b = 0).$$

(¹) D'ailleurs, si l'on substitue à x sa borne inférieure b dans la borne inférieure de u, celle-ci devient $bb' = 0$, et si l'on substitue à x sa borne supérieure a dans la borne supérieure de u, celle-ci devient $a + a' = 1$.

C'est le cas où la valeur de x est absolument indéterminée puisqu'elle est comprise entre les bornes o et 1.

Dans ce cas, on a

$$u = b'x = a + x = x.$$

Pour que la valeur de u soit absolument indéterminée, il faut et il suffit qu'on ait à la fois

$$b'x = 0, \qquad a' + x = 1$$

ou

$$b'x + ax' = 0,$$

c'est-à-dire

$$a < x < b.$$

Or on a déjà, par hypothèse,

$$b < x < a.$$

On en conclut

$$b = x = a.$$

C'est le cas où la valeur de x est complètement déterminée.

36. Solution de l'équation à une inconnue. — La solution de l'équation

$$ax + bx' = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$x = a'u + bu',$$

u étant une indéterminée, à la condition que la résultante de l'équation soit vérifiée.

En effet, on vient de prouver que cette égalité a pour conséquence celle-ci :

$$ab'x + a'bx' = 0,$$

qui équivaut à la double inclusion

$$a'b < x < a' + b.$$

Or, par hypothèse, on a

$$(ab = 0) = (a'b = b) = (a' + b = a').$$

Donc la solution proposée a pour conséquence, dans cette

hypothèse, la double inclusion

$$b < x < a',$$

qui équivaut à l'équation donnée.

Remarque. — Toujours dans la même hypothèse, où l'on a

$$(ab = 0) = (b < a'),$$

on peut mettre cette solution sous les formes plus simples, mais moins symétriques,

$$x = b + a'u, \qquad x = a'(b + u).$$

En effet :

1° On a identiquement

$$b = bu + bu'.$$

Or

$$(b < a') < (bu < a'u).$$

Donc

$$(x = bu' + a'u) = (x = b + a'u).$$

2° Démontrons maintenant la formule

$$x = a'b + a'u.$$

Or

$$a'b = b.$$

Donc

$$x = b + a'u,$$

ce qui ramène à la forme précédente.

On peut encore mettre la même solution sous cette forme

$$x = a'b + u(ab + a'b'),$$

qui résulte de l'équation mise sous la forme

$$ab'x + a'bx' = 0,$$

en remarquant que

$$a' + b = ab + a'b + a'b'$$

et que

$$ua'b < a'b.$$

Mais cette dernière forme est inutilement compliquée,

puisque, par hypothèse,

$$ab = 0.$$

Il reste donc

$$x = a'b + ua'b',$$

qui équivaut encore à

$$x = b + ua',$$

puisque

$$a'b = b, \qquad a' = a'b + a'b'.$$

Quelle que soit la forme qu'on donne à la solution, le paramètre u y est absolument indéterminé, c'est-à-dire peut prendre toutes les valeurs possibles, y compris 0 et 1 ; et, en effet, pour $u = 0$, on a

$$x = b,$$

et, pour $u = 1$, on a

$$x = a'.$$

Ce sont les deux valeurs *extrêmes* de x.

On comprend dès lors que x soit déterminé dans le cas particulier où $a' = b$, et qu'il soit, au contraire, absolument indéterminé dans le cas particulier où

$$b = 0, \qquad a' = 1 \qquad (\text{ou } a = 0).$$

En somme, la formule

$$x = a'u + bu'$$

remplace la variable « limitée » x (comprise entre les bornes a' et b) par la variable « illimitée » u (qui peut prendre toutes les valeurs possibles, y compris 0 et 1).

Remarque (1). — La formule de solution

$$x = a'x + bx'$$

est bien équivalente à l'équation donnée, mais non pas la formule de solution

$$x = a'u + bu'$$

(1) PORETSKY, *Sept lois*.... Chap. XXXIII et XXXIV.

en fonction de l'indéterminée u. En effet, si l'on développe cette dernière, on trouve

$$ab'x + a'bx' + ab(xu + x'u') + a'b'(xu' + x'u) = 0,$$

et, si on la compare à l'équation développée

$$ab + ab'x + a'bx' = 0,$$

on constate que celle-ci contient, *en plus* de la solution, l'égalité

$$ab(xu' + x'u) = 0,$$

et, *en moins* de cette même solution, l'égalité

$$a'b'(xu' + x'u) = 0.$$

D'ailleurs, ces deux termes s'annulent si l'on fait

$$u = x,$$

ce qui ramène à la formule

$$x = a'x + bx'.$$

De cette remarque Poretsky conclut que la solution d'une équation n'en est, en général, ni une conséquence, ni une cause. Elle en est une cause dans le cas particulier où l'on a

$$ab = 0,$$

et elle en est une conséquence dans le cas particulier où l'on a

$$(a'b' = 0) = (a + b = 1).$$

Mais si l'on n'a pas

$$ab = 0,$$

l'équation est insoluble et la formule de solution est absurde, ce qui explique le paradoxe précédent. Si l'on a à la fois

$$ab = 0, \qquad a + b = 1,$$

la solution est à la fois conséquence et cause, c'est-à-dire est équivalente à l'équation. Et, en effet, dans ce cas $(a' = b)$, l'équation est déterminée et n'a qu'une solution

$$x = a' = b.$$

Ainsi, toutes les fois qu'une équation est résoluble, sa solution est une de ses causes, et, en effet, le problème consiste à trouver une valeur de x qui la vérifie, c'est-à-dire qui en soit une cause.

En résumé, on a l'équivalence suivante :

$$(ax + bx' = 0) = (ab = 0)\sum_u (x = a'u + bu')$$

qui contient les implications suivantes :

$$(ax + bx' = 0) < (ab = 0),$$
$$(ax + bx' = 0) < \sum_u (x = a'u + bu'),$$
$$(ab = 0)\sum_u (x = a'u + bu') < (ax + bx' = 0).$$

37. Élimination de plusieurs inconnues. — Considérons maintenant une équation à plusieurs inconnues, et supposons-la ramenée à la forme normale, c'est-à-dire son premier membre développé par rapport aux inconnues, et son second membre nul. Occupons-nous d'abord du problème de l'élimination. On peut éliminer les inconnues, soit une à une, soit en bloc.

Soit par exemple l'équation à trois inconnues

$$(1)\quad \varphi(x, y, z) = axyz + bxyz' + cxy'z + dxy'z' + fx'yz + gx'yz' + hx'y'z + kx'y'z' = 0.$$

On peut en éliminer z, en considérant ce terme comme la seule inconnue, et obtenir la résultante

$$(axy + cxy' + fx'y + hx'y')(bxy + dxy' + gx'y + kx'y') = 0$$

ou

$$(2)\qquad abxy + cdxy' + fgx'y + hkx'y' = 0.$$

Si l'équation (1) est possible, l'équation (2) l'est, c'est-à-dire est vérifiée par quelques valeurs de x et de y. On peut donc en éliminer y en considérant ce terme comme la seule inconnue, et obtenir la résultante

$$(abx + fgx')(cdx + hkx') = 0$$

ou

(3) $$abcdx + fghkx' = 0.$$

Si l'équation (1) est possible, l'équation (3) l'est, c'est-à-dire est vérifiée par quelques valeurs de x. On peut donc en éliminer x et obtenir la résultante finale

$$abcd.fghk = 0,$$

qui est une conséquence de (1), indépendante des inconnues. Il est évident, par raison de symétrie, qu'on obtiendrait la même résultante en éliminant les inconnues dans un autre ordre. D'ailleurs, ce résultat était à prévoir, car puisqu'on a (n° 28)

$$abcdfghk < \varphi(x, y, z),$$

$\varphi(x, y, z)$ ne peut s'annuler que si le produit de ses coefficients est nul

$$[\varphi(x, y, z) = 0] < (abcdfghk = 0).$$

On peut donc éliminer toutes les inconnues en bloc en égalant à 0 le produit des coefficients de la fonction développée par rapport à toutes ces inconnues.

On peut aussi éliminer en bloc quelques-unes seulement des inconnues : pour cela, il suffit de développer le premier membre par rapport à ces inconnues, et d'égaler à 0 le produit des coefficients de ce développement. Ce produit contiendra (en général) les autres inconnues. C'est ainsi que la résultante de l'élimination de z seul est, comme on l'a vu,

$$ab\,xy + cd\,xy' + fg\,x'y + hk\,x'y' = 0$$

et la résultante de l'élimination de y et z est

$$abcdx + fghkx' = 0.$$

On peut obtenir ces résultantes partielles au moyen de la règle pratique suivante : on forme les constituants relatifs aux inconnues qu'on conserve, on donne pour coefficient à chacun d'eux le produit des coefficients des constituants du développement général qui le contiennent en facteur, et l'on égale la somme à 0.

38. Théorème sur les valeurs d'une fonction. — *Toutes les valeurs que peut prendre une fonction d'un nombre quelconque de variables*

$$f(x, y, z, \ldots)$$

sont données par la formule

$$abc\ldots k + u(a + b + c + \ldots + k),$$

où u est absolument indéterminée et où a, b, c, ..., k sont les coefficients du développement de f.

Démonstration. — Il suffit de prouver que dans l'égalité

$$f(x, y, z, \ldots) = abc\ldots k + u(a + b + c + \ldots + k)$$

u peut prendre toutes les valeurs possibles, c'est-à-dire que cette égalité, considérée comme une équation en u, est indéterminée.

On peut d'abord, pour plus d'homogénéité, mettre le second membre sous la forme

$$u' abc\ldots k + u(a + b + c + \ldots + k),$$

car

$$abc\ldots k = u abc\ldots k + u' abc\ldots k$$

et

$$u abc\ldots k < u(a + b + c + \ldots + k).$$

Réduisons le second membre à o (en supposant qu'il n'y a que trois variables x, y, z)

$$\begin{aligned}(axyz + bxyz' + cxy'z + \ldots + kx'y'z') \\ \times [ua'b'c'\ldots k' + u'(a' + b' + c' + \ldots + k')] \\ + (a'xyz + b'xyz' + c'xy'z + \ldots + k'x'y'z') \\ \times [u(a + b + c + \ldots + k) + u' abc\ldots k] = 0,\end{aligned}$$

ou plus simplement

$$\begin{aligned}u(a + b + c + \ldots + k)(a'xyz + b'xyz' + c'xy'z + \ldots + k'x'y'z') \\ + u'(a' + b' + c' + \ldots + k')(axyz + bxyz' + \ldots + kx'y'z') = 0.\end{aligned}$$

Si l'on élimine toutes les variables x, y, z, ..., mais non l'indéterminée u, on trouve la résultante

$$\begin{aligned}u(a + b + c + \ldots + k)\, a'b'c'\ldots k' \\ + u'(a' + b' + c' + \ldots + k')\, abc\ldots k = 0.\end{aligned}$$

Or les deux coefficients de u et u' sont identiquement nuls; il s'ensuit que u est absolument indéterminée, ce qu'il fallait démontrer ([1]).

De ce théorème il résulte cette conséquence très importante : qu'on peut transformer une fonction d'un nombre quelconque de variables en une fonction d'une seule variable sans diminuer ni changer sa « variabilité ».

Corollaire. — Une fonction d'un nombre quelconque de variables peut devenir égale à chacune de ses bornes.

En effet, si l'on met cette fonction sous la forme équivalente

$$abc\dots k + u(a + b + c + \dots + k),$$

elle deviendra égale à son minimum $(abc\dots k)$ pour la valeur $u = 0$, et à son maximum $(a + b + c + \dots + k)$ pour la valeur $u = 1$.

On pourrait d'ailleurs vérifier cette proposition sur la forme primitive de la fonction, en donnant aux variables des valeurs convenables.

Ainsi une fonction peut prendre toutes les valeurs comprises entre ses deux bornes, y compris ces bornes elles-mêmes. Par suite, elle est absolument indéterminée dans le cas où l'on a à la fois

$$abc\dots k = 0, \qquad a + b + c + \dots + k = 1$$

ou

$$abc\dots k = 0 = a'b'c'\dots k'.$$

39. Conditions d'impossibilité et d'indétermination. — Le théorème précédent permet de trouver les conditions d'impossibilité et d'indétermination d'une équation à plusieurs inconnues. Soient $f(x, y, z, \dots)$ le premier membre supposé développé, $a, b, c, \dots, k$ ses coefficients. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation soit possible est

$$abc\dots k = 0.$$

En effet : 1° si pour quelque valeur des inconnues f s'annule, il faut que sa borne inférieure $abc\dots k$ soit nulle;

([1]) WHITEHEAD, *Universal Algebra*, t. I, § 33 (4).

2° si $abc\ldots k$ est nul, f pourra lui devenir égal, et par suite s'annuler pour certaines valeurs des inconnues.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation soit indéterminée (identiquement vérifiée) est

$$a + b + c + \ldots + k = 0.$$

En effet : 1° si $a + b + c + \ldots + k$ est nul, comme c'est la borne supérieure de f, cette fonction sera toujours et nécessairement nulle ; 2° si f est nulle pour toutes les valeurs des inconnues, $a + b + c + \ldots + k$ sera nul, car c'est une des valeurs de f.

On a donc, en résumé, les deux équivalences

$$\sum [f(x, y, z, \ldots) = 0] = (abc\ldots k = 0),$$

$$\prod [f(x, y, z, \ldots) = 0] = (a + b + c + \ldots + k = 0).$$

L'égalité $abc\ldots k = 0$ est, comme on sait, la résultante de l'élimination de toutes les inconnues ; c'est la conséquence qu'on peut tirer de l'équation (supposée vérifiée) indépendamment de toutes les inconnues.

40. Résolution des équations à plusieurs inconnues. — Voyons d'autre part comment on peut résoudre une équation par rapport aux diverses inconnues, et pour cela bornons-nous au cas de deux inconnues

$$axy + bxy' + cx'y + dx'y' = 0.$$

Résolvons d'abord par rapport à x

$$x = (a'y + b'y')x + (cy + dy')x'.$$

La résultante de l'élimination de x est

$$acy + bdy' = 0.$$

Si l'équation donnée est vraie, cette résultante est vraie. Or c'est une équation en y seulement ; résolvons-la :

$$y = (a' + c')y + bdy'.$$

On aurait pu éliminer d'abord y, puis x ; on aurait obtenu

la solution

$$y = (a'x + c'x')y + (bx + dx')y'$$

et l'équation en x

$$abx + cdx' = 0,$$

d'où la solution

$$x = (a' + b')x + c\,dx'.$$

On voit que la résolution d'une équation à deux inconnues n'est pas symétrique par rapport à ces inconnues; suivant l'ordre dans lequel on les élimine, on a la solution

$$x = (a'y + b'y')x + (cy + dy')x',$$
$$y = (a' + c')y + b\,dy',$$

ou la solution

$$x = (a' + b')x + c\,dx,$$
$$y = (a'x + c'x')y + (bx + dx')y'.$$

Si l'on remplace dans les seconds membres les termes x, y par des indéterminées u, v, l'une des inconnues ne dépendra que d'une indéterminée, tandis que l'autre dépendra de deux. On aurait bien une solution symétrique en accouplant les deux formules

$$x = (a' + b')u + c\,du',$$
$$y = (a' + c')v + b\,dv',$$

mais les deux indéterminées u et v ne seraient plus indépendantes l'une de l'autre. En effet, si l'on porte ces solutions dans l'équation donnée, elle devient

$$abcd + ab'c'uv + a'bd'uv' + a'cd'u'v + b'c'du'v' = 0,$$

ou, puisque, par hypothèse, la résultante $abcd = 0$ est vérifiée,

$$ab'c'uv + a'bd'uv' + a'cd'u'v + b'c'du'v' = 0.$$

C'est là une « équation de condition » que doivent vérifier les indéterminées u et v; elle peut toujours être vérifiée, car la résultante est identiquement vraie

$$ab'c'.a'bd'.a'cd'.b'c'd = aa'.bb'.cc'.dd' = 0,$$

mais elle n'est pas vérifiée par n'importe quel couple de valeurs attribuées à u et v.

On peut, néanmoins, trouver des *solutions générales symétriques*, c'est-à-dire des solutions symétriques où les inconnues soient exprimées en fonction de plusieurs indéterminées indépendantes. Ce problème a été traité par Schröder (¹), par M. Whitehead (²) et par M. Johnson (³).

Cette recherche n'a qu'un intérêt purement technique : car, au point de vue pratique, ou bien on cherche à éliminer une ou plusieurs inconnues (ou même toutes), ou bien on cherche à résoudre l'équation par rapport à une inconnue particulière. Dans le premier cas, on développe le premier membre par rapport aux inconnues à éliminer, et l'on égale à o le produit de ses coefficients. Dans le second cas, on développe par rapport à l'inconnue que l'on veut dégager, et l'on applique la formule de résolution de l'équation à une inconnue. Si l'on veut avoir la solution en fonction de quelques inconnues, ou seulement des termes connus, on éliminera d'abord les autres inconnues (ou toutes les inconnues) avant d'effectuer la résolution.

41. Problème de Boole. — Le problème le plus général de l'Algèbre de la Logique, selon Boole, était le suivant (⁴) :

Étant donnée une équation (qu'on suppose possible)

$$f(x, y, z, \ldots) = 0,$$

et, d'autre part, l'expression d'un terme t en fonction des variables contenues dans l'équation précédente

$$t = \varphi(x, y, z, \ldots),$$

déterminer l'expression de t en fonction des constantes contenues dans f et dans φ.

Supposons f et φ développées par rapport aux variables x,

(¹) *Algebra der Logik*, t. I, n° 24.
(²) *Universal Algebra*, t. I, n°ˢ 35-37.
(³) *Sur la théorie des égalités logiques*, ap. *Bibliothèque du Congrès international de Philosophie*, t. III, p. 185 (Paris, A. Colin, 1901).
(⁴) *Laws of Thought*, Chap. IX, n° 8.

$y, z, \ldots$; appelons $p_1, p_2, p_3, \ldots$ leurs constituants

$$f(x, y, z, \ldots) = A p_1 + B p_2 + C p_3 + \ldots,$$
$$\varphi(x, y, z, \ldots) = a p_1 + b p_2 + c p_3 + \ldots.$$

Réduisons au second membre o l'équation qui exprime t:

$$(t\varphi' + t'\varphi = 0)$$
$$= [(a' p_1 + b' p_2 + c' p_3 + \ldots) t + (a p_1 + b p_2 + c p_3 + \ldots) t' = 0].$$

Réunissons les deux équations en une seule, que nous développerons par rapport à t:

$$[(A + a')p_1 + (B + b')p_2 + (C + c')p_3 + \ldots] t$$
$$+ [(A + a)p_1 + (B + b)p_2 + (C + c)p_3 + \ldots] t' = 0.$$

Telle est l'équation qui donnera l'expression cherchée de t. Si l'on éliminait t, on trouverait pour résultante

$$A p_1 + B p_2 + C p_3 + \ldots = 0,$$

comme on pouvait s'y attendre. Si, au contraire, on veut éliminer $x, y, z, \ldots$ (c'est-à-dire les constituants $p_1, p_2, p_3, \ldots$), on mettra l'équation sous la forme

$$(A + a't + at')p_1 + (B + b't + bt')p_2 + (C + c't + ct')p_3 + \ldots = 0$$

et la résultante sera

$$(A + a't + at')(B + b't + bt')(C + c't + ct') \ldots = 0,$$

équation qui ne contient que l'inconnue t et les constantes du problème (coefficients de f et de φ). On en tirera l'expression de t en fonction de ces constantes. Développons le premier membre de cette équation

$$(A + a')(B + b')(C + c') \ldots \times t + (A + a)(B + b)(C + c) \ldots \times t' = 0.$$

La solution est

$$t = (A + a)(B + b)(C + c) \ldots + u(A'a + B'b + C'c + \ldots).$$

La résultante est vérifiée, par hypothèse, puisque c'est

$$ABC \ldots = 0,$$

c'est-à-dire la résultante de l'équation donnée

$$f(x, y, z, \ldots) = 0.$$

On peut voir comment cette équation concourt à restreindre la variabilité de t. Quand t était défini uniquement par la fonction φ, il était déterminé par la double inclusion

$$abc\ldots < t < a + b + c + \ldots.$$

Maintenant que l'on tient compte de la condition $f = 0$, t est déterminé par la double inclusion

$$(A + a)(B + b)(C + c)\ldots < t < (A'a + B'b + C'c + \ldots) \quad (^1).$$

La borne inférieure n'a pu qu'augmenter, la borne supérieure n'a pu que diminuer, car

$$abc\ldots < (A + a)(B + b)(C + c)\ldots$$

et

$$A'a + B'b + C'c\ldots < a + b + c\ldots.$$

Les bornes ne changent pas, si $A = B = C = \ldots = 0$, c'est-à-dire si l'équation $f = 0$ se réduit à une identité; ce qui était évident *a priori*.

42. Méthode de Poretsky. — La méthode de Boole et de Schröder, que nous avons exposée jusqu'ici, est manifestement inspirée par l'exemple de l'Algèbre ordinaire, et elle se résume en ces deux procédés analogues à ceux de l'Algèbre : résolution des équations par rapport aux inconnues; élimination des inconnues. De ces deux procédés le second est de beaucoup le plus important, au point de vue logique, et Boole a même été jusqu'à considérer la déduction comme consistant essentiellement dans l'*élimination des moyens termes*. Cette conception, trop exclusive, lui était suggérée par l'exemple du syllogisme, où la conclusion résulte, en effet, de l'élimination du moyen terme, et que l'on a longtemps considéré (à tort) comme le type unique de la déduc-

(1) WHITEHEAD, *Universal Algebra*, p. 63.

tion médiate (¹). Quoi qu'il en soit, Boole et Schröder ont exagéré l'analogie de l'Algèbre de la Logique avec l'Algèbre ordinaire. En logique, la distinction des termes connus et inconnus est artificielle et presque inutile : tous les termes, en principe, sont connus, et il s'agit seulement, étant données entre eux certaines relations, d'en déduire des relations nouvelles (c'est-à-dire inconnues ou non explicitement connues). C'est le but de la méthode de Poretsky, que nous allons maintenant exposer. Elle peut se résumer en trois lois : la *loi des formes*, la *loi des conséquences* et la *loi des causes*.

43. Loi des formes. — La *loi des formes* répond au problème suivant :

Étant donnée une égalité quelconque, trouver, pour un terme quelconque (simple ou complexe), une détermination qui équivale à cette égalité. En d'autres termes, il s'agit de trouver toutes les *formes* équivalentes de cette égalité, lorsqu'on veut lui donner pour premier membre un terme quelconque.

Nous savons qu'une égalité quelconque peut se ramener au second membre 0 ou 1, c'est-à-dire à une des deux formes équivalentes

$$N = 0, \qquad N' = 1.$$

La fonction N est ce que Poretsky appelle le *zéro logique* de l'égalité donnée; N' est son *tout logique* (²).

Soit U un terme quelconque; je dis que la détermination suivante de U

$$U = N'U + NU'$$

(¹) En fait, la formule fondamentale d'élimination

$$(ax + bx' = 0) < (ab = 0)$$

n'est, on l'a vu, qu'une autre forme et une conséquence du principe du syllogisme

$$(b < x < a') < (b < a').$$

(²) On les appelle « logiques » pour les distinguer du *zéro* et du *tout* identiques, c'est-à-dire pour indiquer que ces deux termes ne sont égaux respectivement à 0 et à 1 qu'en vertu des données du problème.

est équivalente à l'égalité proposée. Et, en effet, elle équivaut, comme on sait, à l'égalité

$$(NU + NU' = 0) = (N = 0).$$

Rappelons la signification de cette détermination

$$U = N'U + NU'.$$

Elle signifie que le terme U est contenu dans N' et contient N. Et cela se comprend, puisque, par hypothèse, N est égal à 0 et N' à 1. On peut donc énoncer la *loi des formes* de la manière suivante :

Pour obtenir toutes les formes équivalentes d'une égalité donnée, il suffit d'exprimer qu'un terme quelconque contient le zéro logique de cette égalité et est contenu dans son tout logique.

Le nombre des formes d'une égalité donnée est illimité : car n'importe quel terme donne lieu à une forme, et à une forme différente des autres, puisqu'elle a un premier membre différent. Mais, si l'on se restreint à l'univers du discours déterminé par n termes simples, le nombre des formes devient fini et déterminé. En effet, dans cet univers limité, il y a 2^n constituants; or tous les termes que l'on peut concevoir et définir dans ces univers sont des sommes de quelques-uns de ces constituants. Leur nombre est donc égal au nombre des combinaisons que l'on peut former avec 2^n constituants, c'est-à-dire à 2^{2^n} (en y comprenant 0, combinaison de 0 constituant, et 1, combinaison de tous les constituants). Ce sera aussi le nombre des formes différentes d'une égalité quelconque dans l'univers en question.

44. Loi des conséquences. — Passons à la loi des conséquences. Généralisant la conception de Boole, qui faisait consister la déduction dans l'élimination des moyens termes, Poretsky la fait consister dans l'*élimination des connaissances*. Voici comment cette conception s'explique et se justifie.

Tout problème dont les données s'expriment par des égalités logiques ou des inclusions peut se ramener à une

seule égalité logique au moyen de la formule [1]

$$(A = 0)(B = 0)(C = 0)\ldots = (A + B + C\ldots = 0).$$

Dans cette égalité logique, qui résume toutes les données du problème, on développera le premier membre par rapport à tous les termes simples qui y figurent (et non plus par rapport aux inconnues). Soit n le nombre des termes simples; le nombre des constituants du développement de 1 est 2^n. Soit $m (\leqq 2^n)$ le nombre de ceux de ces constituants qui figurent dans le premier membre de l'égalité. On obtiendra toutes les conséquences possibles de cette égalité (dans l'univers des n termes en question) en formant toutes les combinaisons additives de ces m constituants, et en les égalant à zéro; et cela, en vertu de la formule

$$(A + B = 0) < (A = 0).$$

On voit qu'on passe de l'égalité à l'une quelconque de ses conséquences en supprimant dans son premier membre quelques-uns de ses constituants, qui correspondent à autant d'égalités élémentaires (à second membre 0), c'est-à-dire à autant de données du problème. C'est ce qu'on exprime en disant qu'on élimine des connaissances.

Le nombre des conséquences qu'on peut tirer d'une égalité (dans l'univers des n termes par rapport auxquels elle est développée) est égal au nombre des combinaisons additives qu'on peut former avec ses m constituants, c'est-à-dire à 2^m. Ce nombre comprend la combinaison de 0 constituant, qui donne lieu à l'identité $0 = 0$, et la combinaison des m constituants, qui reproduit l'égalité donnée.

Appliquons cette méthode à l'équation à une inconnue

$$ax + bx' = 0.$$

Développons par rapport aux *trois* termes a, b, x :

$$\begin{aligned}(abx + ab'x + abx' + a'bx' = 0)\\ = [ab(x + x') + ab'x + a'bx' = 0]\\ = (ab = 0)(ab'x = 0)(a'bx' = 0).\end{aligned}$$

[1] Nous employons des majuscules pour désigner des termes complexes (des fonctions logiques), par opposition aux termes simples, désignés par des minuscules (a, b, c, ...).

On trouve ainsi, d'une part, la résultante $ab = 0$; d'autre part, deux égalités qui se transforment en inclusions

$$x < a' + b, \qquad a'b < x.$$

Mais, en vertu de la résultante qui équivaut à $b < a'$, on a

$$a' + b = a', \qquad a'b = b.$$

Cette conséquence se réduit donc à la double inclusion

$$x < a', \qquad b < x,$$

c'est-à-dire à la solution connue.

Appliquons la même méthode aux prémisses du syllogisme

$$(a < b)(b < c).$$

Réduisons-les à une seule égalité

$$(a < b) = (ab' = 0), \qquad (b < c) = (bc' = 0), \qquad (ab' + bc' = 0),$$

et cherchons-en toutes les conséquences.

Développons par rapport aux trois termes a, b, c:

$$abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' = 0.$$

Les conséquences de cette égalité, qui contient quatre constituants, sont au nombre de 16 (2^4), à savoir :

1° $(abc' = 0) = (ab < c)$;

2° $(ab'c = 0) = (ac < b)$;

3° $(ab'c' = 0) = (a < b + c)$;

4° $(a'bc' = 0) = (b < a + c)$;

5° $(abc' + ab'c = 0) = (a < bc + b'c')$;

6° $(abc' + ab'c' = 0) = (ac' = 0) = (a < c)$.

C'est la conclusion traditionnelle du syllogisme [1].

7° $(abc' + a'bc' = 0) = (bc' = 0) = (b < c)$.

[1] On remarquera que c'est (avec les deux conséquences extrêmes) la seule conséquence qui soit indépendante de b; c'est donc bien la résultante de l'élimination de ce moyen terme.

C'est la deuxième prémisse.

8° $$(ab'c + ab'c' = 0) = (ab' = 0) = (a < b).$$

C'est la première prémisse.

9° $$(ab'c + a'bc' = 0) = (ac < b < a + c);$$

10° $$(ab'c' + a'bc' = 0) = (ab' + a'b < c);$$

11° $$(abc' + ab'c + ab'c' = 0) = (ab' + ac' = 0) = (a < bc);$$

12° $$(abc' + ab'c + a'bc' = 0) = (ab'c + bc' = 0) = (ac < b < c);$$

13° $$(abc' + ab'c' + a'bc' = 0) = (ac' + bc' = 0) = (a + b < c);$$

14° $$(ab'c + ab'c' + a'bc' = 0) = (ab' + a'bc' = 0) = (a < b < a + c).$$

Les deux dernières conséquences (15° et 16°) sont celles qu'on obtient, soit en combinant o constituant, soit en les combinant tous; la première est l'identité

$$0 = 0,$$

ce qui confirme cette proposition paradoxale, que le vrai (l'identité) est impliqué dans n'importe quelle proposition (en est la conséquence); la seconde est l'égalité donnée elle-même, qui est, en effet, sa propre conséquence, en vertu du principe d'identité. Ces deux conséquences peuvent être appelées *conséquences extrêmes* de l'égalité proposée. Si l'on veut les exclure, on devra dire que le nombre des conséquences proprement dites d'une égalité à m constituants est $2^m - 2$.

45. Loi des causes. — La méthode pour trouver les conséquences d'une égalité donnée suggère immédiatement la méthode pour trouver ses *causes*, c'est-à-dire les propositions dont elle est la conséquence. Puisqu'on passe de la cause à la conséquence en éliminant des connaissances, c'est-à-dire en supprimant des constituants, on passera inversement de la conséquence à la cause en adjoignant des connaissances, c'est-à-dire en ajoutant des constituants à l'égalité donnée. Or le nombre des constituants qu'on peut

lui ajouter, c'est-à-dire qui n'y figurent pas, est $2^n - m$. On obtiendra toutes les causes possibles (dans l'univers des n termes considérés) en formant toutes les combinaisons additives de ces constituants, et en les ajoutant au premier membre de l'égalité, en vertu de la formule générale

$$(A + B = 0) < (A = 0),$$

qui signifie que l'égalité $(A = 0)$ a pour cause l'égalité $(A + B = 0)$, où B est quelconque. Le nombre des causes ainsi obtenues sera égal au nombre des combinaisons susdites, c'est-à-dire à

$$2^{2^n - m}.$$

Appliquons cette méthode à la recherche des *causes* des prémisses du syllogisme

$$(a < b)(b < c),$$

qui équivalent, on l'a vu, à l'égalité développée

$$abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' = 0.$$

Sur les huit (2^3) constituants de l'univers de trois termes, cette égalité en contient quatre; les quatre autres sont

$$abc, \quad a'bc, \quad a'b'c, \quad a'b'c'.$$

Le nombre de leurs combinaisons est $16 (2^4)$; c'est aussi le nombre des causes cherchées, qui sont :

1° $(abc + abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' = 0)$
$= (a + bc' = 0) = (a = 0)(b < c)$;

2° $(abc' + ab'c + ab'c' + a'bc + a'bc' = 0)$
$= (abc' + ab' + a'b = 0) = (ab < c)(a = b)$;

3° $(abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' + a'b'c = 0)$
$= (bc' + b'c + ab'c' = 0) = (b = c)(a < b + c)$;

4° $(abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' + a'b'c' = 0)$
$= (c' + ab' = 0) = (c = 1)(a < b)$;

5° $(abc + abc' + ab'c + ab'c' + a'bc + a'bc' = 0)$
$= (a + b = 0) = (a = 0)(b = 0)$;

6° $(abc + abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' + a'b'c = 0)$
$= (a + bc' + b'c = 0) = (a = 0)(b = c)$;

7° $(abc + abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' + a'b'c' = 0)$
$= (a + c' = 0) = (a = 0)(c = 1)$ (¹);

8° $(abc' + ab'c + ab'c' + a'bc + a'bc' + a'b'c = 0)$
$= (ac' + a'c + ab'c + a'bc' = 0)$
$= (a = c)(ac < b < a + c) = (a = b = c)$;

9° $(abc' + ab'c + ab'c' + a'bc + a'bc' + a'b'c' = 0)$
$= (c' + ab' + a'b = 0) = (c = 1)(a = b)$;

10° $(abc' + ab'c + ab'c' + a'bc' + a'b'c + a'b'c' = 0)$
$= (b' + c' = 0) = (b = c = 1)$.

Avant d'aller plus loin, on peut remarquer que : égaler à zéro une certaine somme de constituants, c'est égaler à 1 la somme des autres constituants. Par conséquent, au lieu d'examiner les sommes de sept constituants qu'on obtient en négligeant un des quatre constituants manquants, on peut examiner les égalités qu'on obtient en égalant chacun de ces constituants à 1 :

11° $(a'b'c' = 1) = (a + b + c = 0) = (a = b = c = 0)$;

12° $(a'b'c = 1) = (a + b + c' = 0) = (a = b = 0)(c = 1)$;

13° $(a'bc = 1) = (a + b' + c' = 0) = (a = 0)(b = c = 1)$;

14° $(abc = 1) \qquad = (a = b = c = 1)$.

On remarquera ces quatre dernières causes, qui reposent sur l'inclusion

$$0 < 1.$$

Les deux dernières causes (15° et 16°) sont celles qu'on obtient, soit en ajoutant *tous* les constituants manquants, soit en n'en ajoutant aucun. Dans le premier cas, la somme de tous les constituants étant égale à 1, on trouve

$$1 = 0,$$

(¹) On remarquera que cette cause est la seule qui soit indépendante de b; et, en effet, dans ce cas, b peut être quelconque, il contiendra toujours a et sera toujours contenu dans c. Comparer avec la cause 5°, indépendante de c, et la cause 10°, indépendante de a.

c'est-à-dire l'absurdité, ce qui confirme cette proposition paradoxale que le faux (l'absurde) implique n'importe quelle proposition (en est la *cause*); dans le second cas, on retrouve simplement l'égalité donnée, qui apparaît ainsi comme une de ses causes (en vertu du principe d'identité).

Si l'on néglige ces deux *causes extrêmes*, le nombre des causes proprement dites sera

$$2^{2^n - m} - 2.$$

46. Formes des conséquences et des causes. — On peut appliquer la *loi des formes* aux conséquences et aux causes d'une égalité donnée, de manière à obtenir pour chacune d'elles toutes les formes possibles. Une égalité quelconque équivalant à l'une des deux formes

$$N = 0, \qquad N' = 1,$$

chacune de ses conséquences a la forme [1]

$$NX = 0 \qquad \text{ou} \qquad N' + X' = 1,$$

et chacune de ses causes a la forme

$$N + X = 0 \qquad \text{ou} \qquad N'X' = 1.$$

Et, en effet, on a les implications formelles suivantes :

$$(N + X = 0) < (N = 0) < (NX = 0),$$
$$(N'X' = 1) < (N' = 1) < (N' + X' = 1).$$

Si l'on applique la loi des formes, la formule des consé-

(1) Dans le n° 44 nous avons dit qu'une conséquence s'obtient en prenant une partie des constituants du premier membre N, et non pas en le multipliant par un terme X. Mais il est facile de voir que cela revient au même. En effet, supposons que X soit (comme N) développé par rapport aux n termes du discours. Il se composera d'un certain nombre de constituants. Pour effectuer le produit de N par X, il suffit de multiplier leurs constituants chacun à chacun. Or le produit de deux constituants identiques est égal à chacun d'eux, et le produit de deux constituants différents est nul. Donc le produit de N par X se réduira à la somme des constituants communs à N et à X, laquelle est naturellement contenue dans N. Ainsi, multiplier N par un terme quelconque revient bien à prendre une partie de ses constituants (ou tous, ou aucun).

quences deviendra

$$U = (N' + X')U + NXU'$$

et la formule des causes

$$U = N'X'U + (N + X)U'$$

ou, plus généralement, attendu que X et X′ sont des termes indéterminés, et, par suite, ne sont pas nécessairement la négation l'un de l'autre, la formule des conséquences sera

$$U = (N' + X)U + NYU'$$

et la formule des causes

$$U = N'XU + (N + Y)U'.$$

La première signifie que U est contenu dans $(N' + X)$ et contient NY; et, en effet, cela résulte *a fortiori* de l'hypothèse que U est contenu dans N′ et contient N.

La seconde formule signifie que U est contenu dans $N'X$ et contient $N + Y$; et, en effet, de cela il résulte *a fortiori* que U est contenu dans N′ et contient N.

On peut exprimer verbalement cette règle, si l'on convient d'appeler *sous-classe* toute classe contenue dans une autre et *sur-classe* toute classe qui en contient une autre. On dira alors: pour obtenir toutes les conséquences d'une égalité (mise sous la forme $U = N'U + NU'$), il suffit de substituer à son tout logique N′ toutes ses *sur-classes* et à son zéro logique N toutes ses *sous-classes*. Inversement, pour obtenir toutes les causes de la même égalité, il suffit de substituer à son tout logique toutes ses *sous-classes* et à son zéro logique toutes ses *sur-classes*.

47. Exemple : Problème de Venn. — *Les membres du Conseil d'administration d'une société financière sont, soit des obligataires, soit des actionnaires (mais pas les deux). Or tous les obligataires en font partie. Que faut-il en conclure?*

Soit a l'ensemble des membres du Conseil, b l'ensemble des obligataires, c celui des actionnaires. Les données du problème se traduisent comme suit :

$$a < bc' + b'c, \qquad b < a.$$

Réduisons à une seule égalité développée

$$a(bc = b'c') = 0, \qquad a'b = 0,$$

(1) $$abc + ab'c' + a'bc + a'bc' = 0.$$

Cette égalité, qui contient quatre constituants, équivaut à la suivante, qui contient les quatre autres

(2) $$abc' + ab'c + a'b'c + a'b'c' = 1.$$

On peut mettre cette égalité sous autant de formes différentes qu'il y a de classes dans l'univers des trois termes a, b, c. Exemples :

1° $$a = abc' + ab'c + a'bc + a'bc',$$

c'est-à-dire

$$b < a < bc' + b'c;$$

2° $$b = abc' + ab'c' = ac';$$

3° $$c = ab'c + a'b'c + ab'c' + a'bc',$$

c'est-à-dire

$$ab' + a'b < c < b'.$$

Ce sont d'ailleurs les solutions qu'on obtiendrait en résolvant l'équation (1) par rapport à a, à b ou à c.

On peut ensuite tirer de l'égalité (1) 16 conséquences, à savoir :

1° $abc = 0$;

2° $(ab'c' = 0) = (a < b + c)$;

3° $(a'bc = 0) = (bc < a)$;

4° $(a'bc' = 0) = (b < a + c)$;

5° $(abc + ab'c' = 0) = (a < bc' + b'c)$ [1re prémisse];

6° $(abc + a'bc = 0) = (bc = 0)$;

7° $(abc + a'bc' = 0) = (b < ac' + a'c)$;

8° $(ab'c' + a'bc = 0) = (bc < a < b + c)$;

9° $(ab'c' + a'bc' = 0) = (ab' + a'b < c)$;

10° $(a'bc + a'bc' = 0) = (a'b = 0)$ [2e prémisse];

11° $(abc + ab'c' + a'bc = 0) = (bc + ab'c' = 0)$;

12° $(abc + ab'c' + a'bc' = 0)$;

13° $(abc + a'bc + a'bc' = 0) = (bc + a'bc') = 0$;

14° $(ab'c' + a'bc + a'bc' = 0)$.

Les deux dernières conséquences sont, comme on sait, l'identité $(0 = 0)$ et l'égalité (1) elle-même. On remarquera parmi les conséquences précédentes la 6e $(bc = 0)$, résultante de l'élimination de a, et la 10e $(a'b = 0)$, résultante de l'élimination de c. Quant à la résultante de l'élimination de b, elle est l'identité

$$[(a' + c)\, ac' = 0] = (0 = 0).$$

Enfin on peut tirer de l'égalité (1) ou de son équivalente (2) 16 causes, qui sont :

1° $(abc' = 1) = (a = 1)(b = 1)(c = 0);$

2° $(ab'c = 1) = (a = 1)(b = 0)(c = 1);$

3° $(a'b'c = 1) = (a = 0)(b = 0)(c = 1);$

4° $(a'b'c' = 1) = (a = 0)(b = 0)(c = 0);$

5° $(abc' + ab'c = 1) = (a = 1)(b' = c);$

6° $(abc' + a'b'c = 1) = (a = b = c');$

7° $(abc' + a'b'c' = 1) = (c = 0)(a = b);$

8° $(ab'c + a'b'c = 1) = (b = 0)(c = 1);$

9° $(ab'c + a'b'c' = 1) = (b = 0)(a = c);$

10° $(a'b'c + a'b'c' = 1) = (a = 0)(b = 0);$

11° $(abc' + ab'c + a'b'c = 1) = (b = c')(c' < a);$

12° $(abc' + a'b'c + a'b'c' = 1) = (bc = 0)(a = b + c);$

13° $(abc' + a'b'c + a'b'c' = 1) = (ac = 0)(a = b);$

14° $(ab'c + a'b'c + a'b'c' = 1) = (b = 0)(a < c).$

Les deux dernières causes sont, comme on sait, l'égalité (1) elle-même et l'absurdité $(1 = 0)$. On voit que la cause indépendante de a est la 8e $(b = 0)(c = 1)$, et la cause indépendante de c est la 10e $(a = 0)(b = 0)$. Il n'y a pas de cause (proprement dite) indépendante de b. La cause la plus « naturelle », celle que l'on devine tout d'abord par le simple bon sens, est la 12e:

$$(bc = 0)(a = b + c).$$

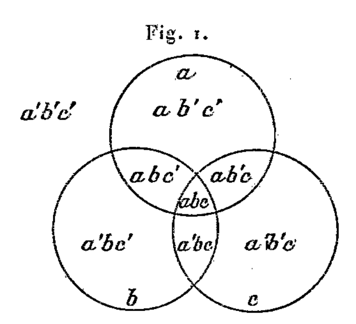
Mais d'autres causes sont tout aussi possibles, par exemple : la 9e, $(b = 0)(a = c)$; la 7e, $(c = 0)(a = b)$, ou la 13e, $(ac = 0)(a = b)$.

On voit que cette méthode fournit l'énumération complète de tous les cas possibles. Elle englobe en particulier, parmi les *formes* d'une égalité, les solutions qu'on en peut tirer par rapport à telle ou telle « inconnue » et, parmi les *conséquences* d'une égalité, les résultantes de l'élimination de tel ou tel terme.

48. Schèmes géométriques de Venn. — La méthode de Poretsky peut être considérée comme un perfectionnement des méthodes de Stanley Jevons et de M. Venn. Elle y trouve, inversement, une illustration géométrique et mécanique. En effet, la méthode de M. Venn se traduit par des schèmes géométriques qui représentent tous les constituants, de sorte qu'on n'a qu'à effacer (en les ombrant) ceux que les données du problème annulent pour obtenir le résultat. Par exemple, l'univers à trois termes a, b, c, représenté par le plan illimité, est divisé par trois contours fermés simples en huit régions qui figurent les huit constituants (*fig.* 1).

Pour traduire géométriquement les données du problème

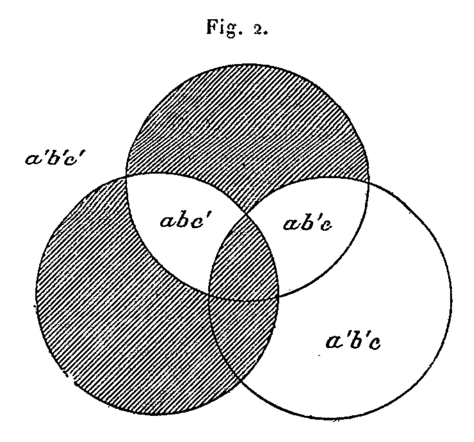
Fig. 1.



de Venn, on devra effacer les régions abc, $ab'c'$, $a'bc$ et $a'bc'$; il restera donc les régions abc', $ab'c$, $a'b'c$ et $a'b'c'$ qui constitueront l'univers *relatif au problème,* ce que Poretsky appelle son *tout logique* (*fig.* 2). Dès lors, toute classe sera contenue dans cet univers, ce qui donnera pour chaque classe l'expression qui résulte des données du problème. Ainsi l'on voit à la simple inspection de la figure que la région bc n'existe pas (est effacée); que la région b se réduit à abc' (donc à ab); que tout a est b ou c, et ainsi de

suite. Seulement ce schématisme, considéré comme une méthode pour résoudre les problèmes logiques, a de graves inconvénients : il n'indique pas comment les données se traduisent par l'annulation de certains constituants, et il n'indique pas non plus comment il faut combiner les constituants restants pour obtenir les conséquences cherchées. En somme, il ne fait que traduire une seule étape du raisonnement, à savoir l'équation du problème; il ne dispense ni

Fig. 2.



des étapes antérieures, c'est-à-dire de la « mise en équation » du problème et de la transformation des prémisses, ni des étapes postérieures, c'est-à-dire des combinaisons qui conduisent aux diverses conséquences. Il est donc de fort peu d'utilité, attendu que les constituants sont aussi bien représentés par les symboles algébriques que par des régions du plan, et sont beaucoup plus maniables sous cette forme.

49. Machine logique de Jevons. — Pour rendre ses schèmes plus maniables, M. Venn a imaginé une combinaison mécanique qui abaisserait et ferait disparaître les régions du plan qu'il faut effacer. Mais un mécanisme plus complet a été inventé par Jevons : c'est en quelque sorte un *piano logique*. Le clavier de cet instrument se compose de touches indiquant les divers termes simples (a, b, c, d), leurs négations, et les signes $+$ et $=$. L'instrument comporte d'autre

part un tableau où sont inscrites sur des tablettes mobiles toutes les combinaisons des termes simples et de leurs négations, c'est-à-dire tous les constituants de l'univers du discours. Au lieu d'écrire les égalités qui traduisent les prémisses, on les « joue » sur le clavier, comme sur celui d'une machine à écrire; cela a pour résultat de faire disparaître du tableau les constituants qui s'annulent en vertu des prémisses. Quand on a « joué » toutes les prémisses, le tableau ne présente plus que les constituants dont la somme est égale à 1, c'est-à-dire forme l'univers relatif au problème (son tout logique). Cette méthode mécanique a, sur la méthode géométrique de M. Venn, l'avantage d'effectuer automatiquement la « mise en équation » (encore faut-il préalablement avoir traduit les prémisses sous forme d'égalités); mais elle ne fournit pas plus d'indications sur les opérations à effectuer pour tirer les conséquences des données inscrites au tableau.

50. Tableau des conséquences. — Mais, mieux que par ces procédés géométriques et mécaniques, la méthode de Poretsky peut s'illustrer par la construction d'un Tableau qui permet de lire immédiatement toutes les conséquences et toutes les causes d'une égalité donnée (ce Tableau est relatif à cette égalité, et chaque égalité donne lieu à un tableau différent). Chaque Tableau comprend les 2^n classes qu'on peut définir et distinguer dans l'univers du discours de n termes. On sait qu'une égalité consiste dans l'annulation d'un certain nombre de ces classes, à savoir de celles qui ont pour constituants quelques-uns des constituants de son *zéro logique* N. Soit m le nombre de ceux-ci; le nombre des sous-classes de N est 2^m; c'est donc le nombre des classes de l'univers qui s'annulent en conséquence de l'égalité considérée. Rangeons-les en une colonne qui commence par 0 et qui finisse par N (les deux extrêmes). D'autre part, étant donnée une classe quelconque, on peut lui ajouter l'une quelconque des classes précédentes sans changer sa valeur, puisque, par hypothèse, elles sont nulles (dans le problème considéré). Par conséquent, chaque classe est égale, en vertu des données du problème, à 2^m classes (y compris elle-même). L'ensemble des 2^n classes du discours se décompose

ainsi en 2^{n-m} séries de 2^m classes, chaque série étant constituée par les sommes d'une certaine classe et des 2^m classes de la première colonne (sous-classes de N). On pourra donc ranger ces 2^m sommes dans les colonnes suivantes, en les faisant correspondre horizontalement aux classes de la première colonne qui leur donnent naissance. Prenons pour exemple l'égalité très simple $a = b$, qui équivaut à

$$ab' + a'b = 0.$$

Le zéro logique (N) est ici $ab' + a'b$; il comprend deux constituants, et par suite quatre sous-classes: 0, ab', $a'b$, et $ab' + a'b$. Elles composeront la première colonne. Les autres classes du discours sont ab, $a'b'$, $ab + a'b'$, et celles qu'on obtient en ajoutant à chacune d'elles les quatre classes de la première colonne. On obtient ainsi le Tableau suivant :

0	ab	$a'b'$	$ab + a'b'$
ab'	a	b'	$a + b'$
$a'b$	b	a'	$a' + b$
$ab' + a'b$	$a + b$	$a' + b'$	1

Par construction, chaque classe de ce Tableau est la somme de celles qui figurent en tête de sa ligne et de sa colonne, et elle est égale, en vertu des données du problème, à chacune de celles qui figurent dans la même colonne. On a ainsi 64 conséquences différentes pour une égalité quelconque dans l'univers du discours de deux lettres; elles comprennent 16 identités (qui s'obtiennent en égalant chaque classe à elle-même), et 16 formes de l'égalité donnée, qu'on obtient en égalant les classes qui correspondent, dans chaque ligne, à des classes qu'on sait être égales, à savoir :

$$0 = ab' + a'b, \quad ab = a + b, \quad a'b' = a' + b', \quad ab + a'b' = 1;$$
$$a = b, \quad b' = a', \quad ab' = a'b, \quad a + b' = a' + b.$$

Chacune de ces huit égalités compte pour deux, suivant qu'on la considère comme une détermination de l'un ou de l'autre de ses membres.

51. Tableau des causes. — Le même Tableau peut servir

à représenter toutes les causes de la même égalité, en vertu du théorème suivant :

Quand les conséquences d'une égalité $N = 0$ *sont exprimées sous forme de déterminations d'une classe quelconque* U, *les causes de cette égalité se déduisent des conséquences de l'égalité opposée :* $N = 1$, *mises sous la même forme, en changeant* U *en* U' *dans l'un des deux membres.*

En effet, on sait que les conséquences de l'égalité $N = 0$ ont la forme

$$U = (N' + X)U + NYU'$$

et que les causes de la même égalité ont la forme

$$U = N'XU + (N + Y)U'.$$

Or, si l'on change U en U' dans l'un des membres de cette dernière formule, elle devient

$$U = (N + X')U + N'Y'U'$$

et l'on peut y supprimer les accents de X et de Y, puisque ces lettres représentent deux classes indéterminées. Mais c'est là la formule des conséquences de l'égalité $N' = 0$ ou $N = 1$.

Ce théorème établi, construisons par exemple le Tableau des causes de l'égalité $a = b$; ce sera le Tableau des conséquences de l'égalité opposée $a = b'$, car la première équivaut à

$$ab' + a'b = 0$$

et la seconde à

$$(ab + a'b' = 0) = (ab' + a'b = 1).$$

0	ab'	$a'b$	$ab' + a'b$
ab	a	b	$a + b$
$a'b'$	b'	a'	$a' + b'$
$ab + a'b'$	$a + b'$	$a' + b$	1

Pour tirer de ce Tableau, au lieu des conséquences de l'égalité $a = b'$, les causes de l'égalité opposée $a = b$, il suffit d'égaler la *négation* de chaque classe à chacune des classes qui se trouvent dans la même colonne que celle-ci.

Exemples :

$$a' + b' = 0, \quad a' + b' = a'b', \quad a' + b' = ab + a'b';$$
$$a' + b = a, \quad a' + b = b', \quad a' + b = a + b'; \quad \ldots$$

Parmi les 64 causes de l'égalité considérée se trouvent 16 absurdités (qui consistent à égaler chaque classe du Tableau à sa négation), et 16 formes de l'égalité (les mêmes, naturellement, que dans le Tableau des conséquences : deux égalités équivalentes sont, en effet, à la fois cause et conséquence l'une de l'autre).

On remarquera que le Tableau des causes ne diffère du Tableau des conséquences que parce qu'il en est le symétrique par rapport à la diagonale principale (0, 1); on peut donc les identifier, à la condition de remplacer dans l'énoncé précédent le mot *colonne* par le mot *ligne*. Et, en effet, la règle des conséquences ne concernant que les classes de la même colonne, on est libre de disposer dans chaque colonne les classes sur des lignes telles que la règle des causes soit vérifiée par les classes de la même ligne.

On remarquera en outre que, en vertu de la méthode de construction adoptée pour ce Tableau, les classes qui sont la négation l'une de l'autre occupent des places symétriques par rapport au centre du Tableau. Pour cela, il faut placer dans la première ligne les sous-classes de la classe N' (tout logique de l'égalité donnée ou zéro logique de l'égalité opposée) dans leur ordre naturel de 0 à N'; puis placer dans chaque case la somme des classes qui sont en tête de sa ligne et de sa colonne.

Moyennant cette précaution, on pourra résumer les deux règles dans l'énoncé pratique suivant :

Pour obtenir toutes les conséquences de l'égalité donnée (à laquelle le Tableau est relatif), il suffit d'égaler chaque classe à toutes les classes de la même colonne; et, pour obtenir toutes ses causes, il suffit d'égaler chaque classe à toutes les classes de la ligne occupée par sa symétrique.

Il est évident que le Tableau relatif à l'égalité $N = 0$ peut aussi servir à l'égalité opposée $N = 1$, à la condition de permuter les mots *ligne* et *colonne* dans l'énoncé précédent.

Bien entendu, la construction du Tableau relatif à une égalité donnée n'est utile et avantageuse que lorsqu'on veut

énumérer complètement les conséquences ou les causes de cette égalité. Si l'on cherche simplement une conséquence ou une cause particulière, relative à telle ou telle classe du discours, on emploie une des formules données plus haut.

52. Nombre des assertions possibles. — Si l'on considère les fonctions et équations logiques comme développées par rapport à *toutes* les lettres, on peut calculer le nombre des assertions ou des problèmes différents qu'on peut énoncer touchant n termes simples. En effet, toutes les fonctions ainsi développées ne peuvent contenir les constituants qu'avec le coefficient 1 ou le coefficient 0 (et dans ce second cas, elles ne les contiennent pas). Elles sont donc des combinaisons additives de ces constituants; et puisque le nombre des constituants est 2^n, le nombre des fonctions possibles est 2^{2^n}. Il faut en retrancher la fonction où tous les constituants sont absents, laquelle est identiquement nulle; restent $2^{2^n}-1$ équations possibles (255, pour $n=3$). Mais ces équations peuvent, à leur tour, se combiner par addition logique, c'est-à-dire par alternative; le nombre de leurs combinaisons est donc $2^{2^{2^n}-1}-1$, en exceptant toujours la combinaison nulle. Tel est le nombre des assertions possibles touchant n termes. Pour $n=2$, ce nombre est déjà 32767 (¹). Encore faut-il remarquer qu'on n'admet dans ce calcul que des prémisses universelles, comme on va l'expliquer au numéro suivant.

53. Propositions particulières. — Nous n'avons jusqu'ici considéré que des propositions à copule *affirmative* (inclusions ou égalités) qui correspondent aux propositions *universelles* de la Logique classique (²). Il resterait à étudier

(¹) G. PEANO, *Calcolo geometrico*, 1888, p. X. — SCHRÖDER, *Algebra der Logik*, t. II, p. 144-148.

(²) En effet, l'*universelle affirmative* : « Tout a est b » se traduit par les formules

$$(a < b) = (a = ab) = (ab' = 0) = (a' + b = 1),$$

et l'*universelle négative* : « Nul a n'est b » par les formules

$$(a < b') = (a = ab') = (ab = 0) = (a' + b' = 1).$$

les propositions à copule *négative* (non-inclusions ou inégalités) qui traduisent les propositions *particulières* [1]; mais le calcul des propositions à copule négative résulte des lois déjà connues, notamment des formules de De Morgan et de la loi de contraposition. Nous allons énumérer les principales formules qu'on en déduit.

Le principe de composition engendre les formules suivantes :

$$(c \not< ab) = (c \not< a) + (c \not< b),$$
$$(a + b \not< c) = (a \not< c) + (b \not< c),$$

d'où les cas particuliers

$$(ab \neq 1) = (a \neq 1) + (b \neq 1),$$
$$(a + b \neq 0) = (a \neq 0) + (c \neq 0).$$

De là on déduit les importantes implications suivantes :

$$(a \neq 0) < (a + b \neq 0),$$
$$(a \neq 1) < (ab \neq 1).$$

On déduit du principe du syllogisme, en vertu de la loi de transposition,

$$(a < b)(a \neq 0) < (b \neq 0),$$
$$(a < b)(b \neq 1) < (a \neq 1).$$

Les formules de transformation des inclusions et des égalités donnent les formules correspondantes de transformation des non-inclusions et des inégalités :

$$(a \not< b) = (ab' \neq 0) \qquad = (a' + b \neq 1),$$
$$(a \neq b) = (ab' + a'b \neq 0) = (ab + a'b' \neq 1).$$

54. Solution de l'inéquation à une inconnue. — Si l'on

[1] En effet, la *particulière affirmative :* « Quelque a est b », étant la négation de l'universelle négative, s'exprime par les formules

$$(a \not< b') = (a \neq ab') = (ab \neq 0) = (a' + b' \neq 1),$$

et la *particulière négative :* « Quelque a n'est pas b », étant la négation de l'universelle affirmative, s'exprime par les formules

$$(a \not< b) = (a \neq ab) = (ab' \neq 0) = (a' + b \neq 1).$$

considère l'inégalité conditionnelle (*l'inéquation*) à une inconnue

$$ax + bx' \neq 0,$$

on sait que son premier membre est contenu dans la somme de ses coefficients

$$ax + bx' < a + b.$$

On en conclut que, si cette inéquation est vérifiée, on a l'inégalité

$$a + b \neq 0.$$

C'est la condition nécessaire de la résolubilité de l'inéquation, et la résultante de l'élimination de l'inconnue x. Et, en effet, puisqu'on a l'équivalence

$$\prod_x (ax + bx' = 0) = (a + b = 0),$$

on a aussi (par contraposition) l'équivalence

$$\sum_x (ax + bx' \neq 0) = (a + b \neq 0).$$

De même, de l'équivalence

$$\sum_x (ax + bx' = 0) = (ab = 0),$$

on peut déduire l'équivalence

$$\prod_x (ax + bx' \neq 0) = (ab \neq 0),$$

qui signifie que la condition nécessaire et suffisante pour que l'inéquation soit toujours vraie est

$$(ab \neq 0).$$

Et, en effet, on sait que, dans ce cas, l'équation

$$(ax + bx' = 0)$$

est impossible (n'est jamais vraie).

Puisque, d'ailleurs, on a l'équivalence

$$(ax + bx' = 0) = (x = a'x + bx'),$$

on aura aussi l'équivalence

$$(ax + bx' \neq 0) = (x \neq a'x + bx').$$

Voyons ce que signifie cette solution :

$$(ax + bx' \neq 0) = (ax \neq 0) + (bx' \neq 0) = (x \not< a') + (b \not< x).$$

« Ou x n'est pas contenu dans a', ou il ne contient pas b. » C'est bien la négation de la double inclusion

$$b < x < a'.$$

De même que le produit de plusieurs égalités se ramène à une seule égalité, la somme (l'alternative) de plusieurs inégalités se ramène à une seule inégalité. Mais on ne sait pas ramener à une seule plusieurs égalités alternatives, ni plusieurs inégalités simultanées.

55. Système d'une équation et d'une inéquation. — Nous nous bornerons à étudier le cas d'une égalité et d'une inégalité simultanées. Soient, par exemple, les deux prémisses

$$(ax + bx' = 0)(cx + dx' \neq 0).$$

Pour que la première (l'équation) puisse être satisfaite, il faut que sa résultante

$$ab = 0$$

soit vérifiée. La solution de cette équation est

$$x = a'x + bx'.$$

Portons cette expression (qui équivaut à l'équation) dans l'inéquation; celle-ci devient

$$(a'c + ad)x + (bc + b'd)x' \neq 0.$$

Sa résultante (sa condition de résolubilité) est

$$(a'c + ad + bc + b'd \neq 0) = [(a' + b)c + (a + b')d \neq 0],$$

ce qui, en tenant compte de la résultante de l'égalité

$$(ab = 0) = (a' + b = a') = (a + b' = b'),$$

se réduit à

$$a'c + b'd \neq 0.$$

On peut arriver au même résultat en remarquant que l'égalité équivaut aux deux inclusions

$$(x < a')(x' < b'),$$

et en multipliant les deux membres de chacune par un même terme

$$(cx < a'c)(dx' < b'd) < (cx + dx' < a'c + b'd)$$
$$(cx + dx' \neq 0) < (a'c + b'd \neq 0).$$

Cette résultante implique la résultante de l'inégalité prise seule

$$c + d \neq 0,$$

de sorte qu'on n'a pas à tenir compte de celle-ci. Il suffit donc de lui adjoindre la résultante de l'égalité pour avoir la résultante complète du système proposé

$$(ab = 0)(a'c + b'd \neq 0).$$

La solution de l'inégalité transformée (qui, par suite, enveloppe la solution de l'égalité) est

$$x \neq (a'c' + ad')x + (bc + b'd)x'.$$

56. Formules spéciales au Calcul des propositions. — Toutes les formules que nous avons vues jusqu'ici valent pour les propositions comme pour les concepts. Nous allons maintenant établir une série de formules qui ne valent que pour les propositions, parce qu'elles dérivent toutes d'un axiome spécial au Calcul des propositions, qu'on peut appeler le *principe d'assertion*. Cet axiome est le suivant :

X. $$(a = 1) = a.$$

I. P. : Dire qu'une proposition a est vraie, c'est affirmer cette proposition elle-même. En d'autres termes, affirmer

une proposition, c'est affirmer la vérité de cette proposition (¹).

Corollaire :

$$a' = (a' = 1) = (a = 0).$$

I. P. : La négation d'une proposition a équivaut à l'affirmation que cette proposition est fausse.

On avait déjà, en vertu de l'axiome IX (n° 20),

$$(a = 1)(a = 0) = 0.$$

« Il est impossible qu'une proposition soit à la fois vraie et fausse », car

(Syll.) $$(a = 1)(a = 0) < (1 = 0) = 0.$$

Mais on a maintenant, en vertu de l'axiome X,

$$(a = 1) + (a = 0) = a + a' = 1.$$

« Ou bien une proposition est vraie, ou bien elle est fausse. »

De ces deux formules réunies on déduit immédiatement que les propositions $(a = 1)$ et $(a = 0)$ sont contradictoires, c'est-à-dire

$$(a \neq 1) = (a = 0), \qquad (a \neq 0) = (a = 1).$$

Au point de vue du calcul, l'axiome X permet de réduire à son premier membre toute égalité dont le second membre est 1, et de transformer les inégalités en égalités. Bien entendu, ces égalités et inégalités doivent avoir pour membres des propositions. Toutefois, toutes les formules de ce Chapitre sont valables aussi pour les classes, dans le cas particulier où l'univers du discours ne comprend qu'un élément : car alors il n'y a pas d'autres classes que 0 et 1. En un mot, le Calcul spécial des propositions équivaut au Calcul des classes quand celles-ci ne sont susceptibles que des deux valeurs 0 et 1.

(¹) On voit immédiatement que cette formule n'est pas susceptible d'I. C. : car, si a est un concept, $(a = 1)$ est une proposition, et l'on aurait ainsi une égalité logique (identité) entre un concept et une proposition, ce qui est absurde.

57. Équivalence d'une implication et d'une alternative. — L'équivalence fondamentale

$$(a < b) = (a' + b = 1)$$

donne lieu, moyennant l'axiome X, à l'équivalence suivante

$$(a < b) = (a' + b),$$

qui n'est pas moins fondamentale dans le Calcul des propositions. Dire que a implique b, c'est affirmer « non-a ou b », c'est-à-dire « a est fausse ou b est vraie ». Cette équivalence est fréquemment employée dans le langage usuel.

Corollaire. — Pour une égalité quelconque on a l'équivalence

$$(a = b) = ab + a'b'.$$

Démonstration :

$$(a = b) = (a < b)(b < a) = (a' + b)(b' + a) = ab + a'b'.$$

« Affirmer que deux propositions sont égales (équivalentes), c'est affirmer qu'elles sont, ou toutes deux vraies, ou toutes deux fausses. »

L'équivalence fondamentale établie ci-dessus a d'importantes conséquences, que nous allons énumérer.

D'abord, elle permet de ramener les propositions secondaires, tertiaires, etc., à des propositions primaires, ou même à des sommes (alternatives) de propositions élémentaires. En effet, elle permet de supprimer la copule d'une proposition quelconque, et par suite d'abaisser son ordre de complexité. Une implication $(A < B)$, où A et B représentent des propositions plus ou moins complexes, est ramenée à la somme $A' + B$, où ne figurent que les copules intérieures à A et à B, c'est-à-dire des propositions d'un ordre inférieur. De même, une égalité $(A = B)$ est ramenée à la somme $(AB + A'B')$, qui est d'un ordre moins élevé.

On sait que le principe de composition permet de « composer » plusieurs inclusions ou égalités *simultanées;* mais on ne peut pas « composer » plusieurs inclusions ou égalités alternatives, ou du moins le résultat n'est pas équivalent à leur alternative : il n'en est qu'une conséquence. En un mot,

on a seulement les *implications*

$$(a < c) + (b < c) < (ab < c),$$
$$(c < a) + (c < b) < (c < a + b),$$

qui, dans les cas particuliers où l'on fait respectivement $c = 0$, $c = 1$, deviennent

$$(a = 0) + (b = 0) < (ab = 0),$$
$$(a = 1) + (b = 1) < (a + b = 1).$$

Dans le Calcul des classes, les implications inverses ne sont pas valables; et, en effet, de ce que la classe ab est nulle on ne peut pas conclure la nullité de l'une des classes a ou b (elles peuvent être non nulles et n'avoir aucun élément commun); et de ce que la somme $(a + b)$ est égale à 1 on ne peut pas conclure que a ou b soit égale à 1 (ces classes peuvent, *réunies*, comprendre tous les éléments de l'univers sans que l'une d'elles, *isolée*, les comprenne tous). Mais ces implications inverses sont vraies dans le Calcul des propositions

$$(ab < c) < (a < c) + (b < c),$$
$$(c < a + b) < (c < a) + (c < b);$$

car on peut les déduire de l'équivalence établie ci-dessus, ou plutôt, on en peut déduire les égalités correspondantes, qui les impliquent,

$$(1) \qquad (ab < c) = (a < c) + (b < c),$$
$$(2) \qquad (c < a + b) = (c < a) + (c < b).$$

Démonstration :

1° $$(ab < c) = a' + b' + c,$$
$$(a < c) + (b < c) = (a' + c) + (b' + c) = a' + b' + c;$$

2° $$(c < a + b) = c' + a + b,$$
$$(c < a) + (c < b) = (c' + a) + (c' + b) = c' + a + b.$$

Dans les cas particuliers où l'on fait respectivement $c = 0$, $c = 1$, on trouve

$$(3) \qquad (ab = 0) = (a = 0) + (b = 0),$$
$$(4) \qquad (a + b = 1) = (a = 1) + (b = 1).$$

I. P. : (1) Dire que deux propositions réunies en impliquent une troisième, c'est dire que l'une d'elles implique cette troisième.

(2) Dire qu'une proposition implique l'alternative de deux autres, c'est dire qu'elle implique l'une d'elles.

(3) Dire que l'ensemble de deux propositions est faux, c'est dire que l'une d'elles (au moins) est fausse.

(4) Dire que l'alternative de deux propositions est vraie, c'est dire que l'une d'elles (au moins) est vraie.

On remarquera le caractère paradoxal des deux premiers de ces énoncés, en contraste avec le caractère évident des deux derniers. Ces paradoxes s'expliquent, d'une part, par l'axiome spécial qui affirme qu'une proposition est vraie ou fausse; d'autre part, par ce fait que le faux implique le vrai, et que *seul* le faux n'est pas impliqué par le vrai. Par exemple, dans le premier énoncé, si les deux prémisses sont vraies, chacune d'elles implique la conséquence; et si l'une d'elles est fausse, elle impliquera la conséquence (vraie ou fausse). Dans le deuxième, si l'alternative est vraie, l'un de ses termes devra être vrai, et par suite sera impliqué comme elle par la prémisse (vraie ou fausse).

58. Loi d'importation et d'exportation. — L'équivalence fondamentale $(a < b) = a' + b$ a encore beaucoup d'autres conséquences intéressantes. L'une des plus importantes est la *loi d'importation et d'exportation*, que traduit la formule suivante :

$$[a < (b < c)] = (ab < c).$$

« Dire que, si a est vraie, b implique c, c'est dire que a et b impliquent c. » Cette égalité enferme deux implications inverses : si l'on infère le second membre du premier, on *importe* dans l'implication $(b < c)$ l'hypothèse ou condition a; si l'on infère le premier membre du second, on *exporte* au contraire de l'implication $(ab < c)$ l'hypothèse a.

Démonstration :

$$[a < (b < c)] = a' + (b < c) = a' + b' + c,$$
$$(ab < c) = (ab)' + c = a' + b' + c.$$

Corollaires. — 1° On a évidemment l'équivalence

$$[a < (b < c)] = [b < (a < c)],$$

puisque les deux membres sont égaux à $(ab < c)$, en vertu de la loi commutative de la multiplication.

2° On a aussi

$$[a < (a < b)] = (a < b),$$

car, en vertu de la loi d'importation et d'exportation

$$[a < (a < b)] = (aa < b) = (a < b).$$

Si l'on applique la *loi d'importation* aux deux formules suivantes, dont la première résulte du principe d'identité, et dont la seconde traduit le principe de contraposition,

$$(a < b) < (a < b), \qquad (a < b) < (b' < a'),$$

on obtient les deux formules

$$(a < b)a < b, \qquad (a < b)b' < a',$$

qui sont les deux types du *raisonnement hypothétique :* « Si a implique b, et si a est vraie, b est vraie » (*modus ponens*); « si a implique b, et si b est fausse, a est fausse » (*modus tollens*).

Remarque. — Ces deux formules pourraient se déduire directement, au moyen du principe d'assertion, de celles-ci :

$$(a < b)(a = 1) < (b = 1),$$
$$(a < b)(b = 0) < (a = 0),$$

qui ne dépendent pas de la loi d'importation et qui résultent du principe du syllogisme.

De la même équivalence fondamentale on peut déduire plusieurs formules paradoxales :

1° $$a < (b < a), \qquad a' < (a < b).$$

« Si a est vraie, a est impliquée par une proposition b quelconque; si a est fausse, a implique une proposition b

quelconque. » Cela est conforme aux propriétés connues de o et de 1.

2° $$a < [(a < b) < b], \qquad a' < [(b < a) < b'].$$

« Si a est vraie, alors « a implique b » implique b; si a est fausse, alors « b implique a » implique non-b. »

Ces deux formules sont d'autres formes du raisonnement hypothétique (*modus ponens* et *modus tollens*).

3° $$[(a < b) < a] = a \text{ (1)}, \qquad [(b < a) < a'] = a'.$$

« Dire que, si a implique b, a est vraie, c'est affirmer a; dire que, si b implique a, a est fausse, c'est nier a. »

Démonstration :

$$[(a < b) < a] = (a' + b < a) = ab' + a = a,$$
$$[(b < a) < a'] = (b' + a < a') = a'b + a' = a'.$$

Dans les formules 1° et 3°, où b est quelconque, on pourrait introduire le signe $\prod$ par rapport à b. Dans la formule suivante, l'emploi de ce signe devient nécessaire.

4° $$\prod_x \{[a < (b < x)] < x\} = ab.$$

Démonstration :

$$\{[a < (b < x)] < x\} = \{[a' + (b < x)] < x\}$$
$$= [(a' + b' + x) < x] = abx' + x = ab + x.$$

Nous devons maintenant former le produit $\prod_x (ab + x)$, où x peut prendre toutes les valeurs, y compris o et 1. Or il est évident que la partie commune à tous les termes de la forme $(ab + x)$ ne peut être que ab. En effet : 1° ab est contenu dans toutes les sommes $(ab + x)$, donc dans leur

(1) Cette formule est le *principe de réduction* de M. Russell : *The principles of mathematics*, t. I, p. 17 (Cambridge, University Press, 1903).

partie commune; 2° la partie commune à toutes les sommes

$$(ab + x)$$

doit être contenue dans $(ab + 0)$, c'est-à-dire dans ab. Donc cette partie commune est égale à ab [1]; ce qui démontre le théorème.

59. Réduction des inégalités à des égalités. — Comme nous l'avons déjà dit, le principe d'assertion permet de ramener les inégalités à des égalités au moyen des formules suivantes :

$$(a \neq 0) = (a = 1), \qquad (a \neq 1) = (a = 0),$$
$$(a \neq b) = (a = b').$$

En effet :

$$(a \neq b) = (ab' + a'b \neq 0) = (ab' + a'b = 1) = (a = b').$$

On a par suite la formule paradoxale

$$(a \neq b) = (a = b').$$

Cela se comprend, car, quelle que soit la proposition b, ou elle est vraie, et sa négation est fausse; ou elle est fausse, et sa négation est vraie. Or, quelle que soit la proposition a, elle est vraie ou fausse; donc elle est nécessairement égale soit à b, soit à b'. Ainsi, nier une égalité (entre propositions), c'est affirmer l'égalité *opposée*.

De là il résulte que, dans le Calcul des propositions, on n'a pas à considérer des inégalités, ce qui simplifie beaucoup la théorie et la pratique. En outre, de même qu'on peut composer des égalités alternatives, on peut aussi composer des inégalités simultanées, puisqu'elles se ramènent à des égalités.

(1) Ce raisonnement est général, et l'on peut en conclure la formule

$$\prod_x (a + x) = a,$$

d'où se déduit la formule corrélative

$$\sum_x ax = a.$$

En effet, des formules établies plus haut (n° 57)

$$(ab = 0) = (a = 0) + (b = 0),$$
$$(a + b = 1) = (a = 1) + (b = 1),$$

on déduit par contraposition

$$(a \neq 0)(b \neq 0) = (ab \neq 0),$$
$$(a \neq 1)(b \neq 1) = (a + b \neq 1).$$

Ces deux formules équivalent d'ailleurs, d'après ce qu'on vient de dire, aux formules connues

$$(a = 1)(b = 1) = (ab = 1),$$
$$(a = 0)(b = 0) = (a + b = 0).$$

Dans le Calcul des propositions, on pourra donc résoudre tous les systèmes d'égalités ou d'inégalités simultanées, et tous les systèmes d'égalités ou d'inégalités alternatives; ce qu'on ne peut pas dans le Calcul des classes. Pour cela on n'aura qu'à appliquer la règle suivante :

Réduire d'abord les inclusions à des égalités, et les non-inclusions à des inégalités; puis réduire les égalités au second membre 1, et les inégalités au second membre 0, et transformer celles-ci en égalités à second membre 1; enfin supprimer les seconds membres 1 et les signes =, c'est-à-dire faire le produit des premiers membres des égalités simultanées et la somme des premiers membres des égalités alternatives, en conservant les parenthèses.

60. Conclusion. — L'exposé précédent est loin d'avoir épuisé le sujet; il ne prétend pas être un traité complet d'Algèbre de la Logique, mais seulement faire connaître les principes et les théories élémentaires de cette science. L'Algèbre de la Logique est un algorithme qui a ses lois propres; elle est fort analogue par certains côtés à l'Algèbre ordinaire, et par d'autres elle en est très différente : par exemple, elle ignore la distinction des *degrés;* les lois de tautologie et d'absorption y introduisent de grandes simplifications et en excluent les coefficients numériques. C'est un calcul formel qui peut donner lieu à toutes sortes de théories et de problèmes, et qui est susceptible d'un développement presque indéfini.

Mais c'est en même temps un système clos, et il importe

de montrer qu'il est loin d'embrasser toute la Logique. Ce n'est, à proprement parler, que l'Algèbre de la Logique classique; comme celle-ci, elle reste enfermée dans le domaine circonscrit par Aristote, à savoir le domaine des relations d'inclusion entre des concepts, et des relations d'implication entre des propositions. Certes, la Logique classique (même abstraction faite de ses erreurs et de ses superfétations) était beaucoup plus étroite que l'Algèbre de la Logique; elle était presque entièrement confinée dans la théorie du syllogisme, dont les bornes paraissent aujourd'hui bien restreintes et bien artificielles. Néanmoins, l'Algèbre de la Logique ne fait encore que traiter, avec beaucoup plus d'ampleur et de généralité, des problèmes du même ordre; elle n'est, au fond, pas autre chose que la théorie des ensembles considérés dans leurs relations d'inclusion ou d'identité. Or la Logique doit étudier bien d'autres espèces de concepts que les concepts génériques (concepts de classes) et bien d'autres relations que la relation d'inclusion (de subsomption) entre de tels concepts. Elle doit, en un mot, se développer en une Logique des relations, que Leibniz a prévue, que Peirce et Schröder ont fondée, et que MM. Peano et Russell paraissent avoir établie sur des bases définitives. Or, tandis que la Logique classique et l'Algèbre de la Logique ne sont presque d'aucune utilité aux Mathématiques, celles-ci trouvent au contraire dans la Logique des relations leurs concepts et leurs principes fondamentaux; la véritable logique des Mathématiques est la Logique des relations. L'Algèbre de la Logique elle-même relève de la Logique pure, en tant que théorie mathématique particulière, car elle repose sur des principes que nous avons implicitement postulés, et qui ne sont pas susceptibles d'expression algébrique ou symbolique, parce qu'ils sont le fondement de tout symbolisme et de tout calcul [1]. On peut donc dire que l'Algèbre de la Logique est une Logique *mathématique*, par sa forme et par sa méthode; mais il ne faut pas la prendre pour la Logique *des Mathématiques*.

[1] Le principe de déduction et le principe de substitution. *Voir* notre Ouvrage *Les Principes des Mathématiques*, Chap. I, A.

FIN.

BIBLIOGRAPHIE [1].

GEORGES BOOLE. *The mathematical analysis of Logic* (Cambridge and London, 1847).
— *An investigation of the Laws of Thought* (London and Cambridge, 1854).

W. STANLEY JEVONS. *Pure Logic* (London, 1864).
— *On the mechanical performance of logical inference* (*Philosophical Transactions*, 1870).

ERNST SCHRÖDER. *Der Operationskreis des Logikkalkuls* (Leipzig, Teubner, 1877).
— *Algebra der Logik*, t. I (1890), t. II (1891), t. III: *Logik der Relative* (1895) (Leipzig, Teubner) [2].

AL. MACFARLANE. *Principles of the Algebra of Logic, with examples* (Edinburgh, 1879).

JOHN VENN. *Symbolic Logic*, 1re éd., 1881; 2e éd., 1894 (London, Macmillan) [3].

Studies in Logic by members of the Johns Hopkins University (Boston, 1883), notamment : Mrs LADD-FRANKLIN, MM. MITCHELL et PEIRCE.

WHITEHEAD. *A Treatise on universal Algebra*, vol. I (Cambridge, University Press, 1898).
— *Memoir on the Algebra of symbolic Logic* (*American Journal of Mathematics*, t. XXIII, 1901).

(1) Cette liste ne comprend que les travaux qui se rattachent au système de Boole et Schröder exposé dans cet Ouvrage.

(2) M. Eugen Müller a publié des compléments aux Tomes II et III de cet Ouvrage d'après les papiers laissés par Schröder.

(3) Ouvrage précieux au point de vue historique et bibliographique.

Eugen Müller. *Ueber die Algebra der Logik : I. Die Grundlagen des Gebietekalkuls; II. Das Eliminationsproblem und die Syllogistik;* programmes du Gymnase grand-ducal de Tauberbischofsheim (Bade), 1900, 1901 (Leipzig, Teubner).

Johnson. *Sur la théorie des égalités logiques* (*Bibliothèque du Congrès de Philosophie*, t. III; Paris, A. Colin, 1901).

Platon Poretsky. *Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques* (Kazan, 1899).
— *Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques* (Kazan, 1902).
— *Exposé élémentaire de la théorie des égalités logiques à deux termes* (*Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VIII, 1900).
— *Théorie des égalités logiques à trois termes* (*Bibliothèque du Congrès de Philosophie*, t. III ; Paris, A. Colin, 1901).
— *Théorie des non-égalités logiques* (Kazan, 1904).

Huntington. *Sets of independent postulates for the Algebra of Logic* (*Transactions of the American mathematical Society*, t. V, 1904).

LISTE DES SIGNES ET ABRÉVIATIONS.

I. C.	*Interprétation conceptuelle* (*voir* n° 2).
I. P.	*Interprétation propositionnelle* (*voir* n° 2).
$<$	I. C. : *est contenu dans*; I. P. : *implique* (*voir* n° 3).
$=$	*Égale* (*voir* n° 4).
$+$	Signe de l'addition logique (*voir* n° 7).
$\times$ ou . ou ( ) ( )	Signe de la multiplication logique (*voir* n° 7).
a'	« non-a »; négation de a (*voir* n° 15).
$\not<$	Négation du signe $<$ (*voir* n° 15, note).
$\neq$	Négation du signe $=$ (*voir* n° 15, note).
0	I. C. : la *classe nulle;* I. P. : le *faux* (*voir* n° 13).
1	I. C. : *la classe totale;* I. P. : le *vrai* (*voir* n° 13).

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ACHEVÉ D'IMPRIMER
EN JANVIER 1980
SUR LES PRESSES
DE JOSEPH FLOCH
MAITRE-IMPRIMEUR
A MAYENNE
No 7027